La Cátedra:
ALGEBRA SUPERIOR

LIC. FERNANDO ARTURO QUEZADA HOEPELMAN
Profesor a Dedicación Exclusiva, Coordinador Algebra Superior
del Departamento de Matemática y Estadística.
Universidad Nacional Pedro Henríquez Ureña

La Catedra: Algebra Superior
Lic. Fernando Arturo Quezada Hoepelman

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA
Autopista Duarte Km. 5 1/2
Santo Domingo, D. N.
República Dominicana
Teléfono: (809) 562-6601

Primera Edición:
Enero 1995

Revisores y Correctores:
Lic. Mercedes Almonte de Ramírez
Lic. Orietta Liriano de Delgado

Diseño, Diagramación,
Composición y Arte Final:
MicroMER, S. A.
Teléfono: (809) 682-8250

Impresión:
Imprenta UNPHU

Agradecimientos

Agradecimientos

La educación es la base del progreso y desarrollo de un país. Por lo tanto cada ciudadano debe aportar sus conocimientos adquiridos a través de ella para fortalecerla cada día más.

Doy gracias al Director del Departamento de Matemática y Estadística, Lic. Bartolo De la Cruz Polonia, por la iniciativa de impulsarme a escribir el libro y obtener las facilidades y recursos con los funcionarios de la institución.

De la misma manera al Arq. Roberto Bergés Febles, Rector de la Universidad, al Lic. Andrés Sallent, Presidente de la Comisión de Horarios, al Lic. Bienvenido De la Cruz, Vicerrector Administrativo, y a todos mis compañeros, que de una forma u otra contribuyeron para obtener este logro.

A mi esposa Luz de Quezada, mis hijos: Lucy, Fernando y Miguel, mis sobrinos: Milagros Corletto, Rafael Miguel, Vivian y Angelita, yerno: Amable

Jiménez, nueras: Lissette Martínez y Josefina Liriano, mis nietos: Amable de Jesús, Miguel Angel y Angel Miguel

Les doy las gracias infinitas por darme el apoyo moral y espiritual que tanto necesitamos los padres.

Objetivos

Objetivos

Generales

1.- Adquirir y desarrollar habilidades en el manejo y aplicación en las técnicas para la solución de problemas concernientes al Algebra Superior.

2.- Reconocer la ayuda brindada por esta asignatura en la búsqueda de mayores conocimientos para analizarlos en otros cursos donde ella es prerequisito.

3.- Tomar conciencia de la importancia de esta asignatura para su formación matemática y soluciones de situaciones de nuestra vida real.

Terminales

Al término de este libro, el estudiante estará capacitado en:

— Conocer el simbolismo y poder aplicar la parte conceptual de los conocimientos teóricos relativos a la asignatura.

Propósito

Hacer más funcional el estudio del Algebra Superior, dotando al alumno de todos los temas del programa en un sólo texto.

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido

UNIDAD NO. 7

UNIDAD No. 1

Los Conjuntos

UNIDAD No. 1

Los Conjuntos

1.1.- Los Conjuntos

1.1.1.- Conjunto

Por intuición es una lista o colección de objetos bien definidos, estos objetos reciben el nombre de elementos, y pueden ser: números, letras, personas, etc.

Para que un conjunto esté bien definido, sus elementos deben ser determinados con exactitud, para saber si un elemento pertenece a él o no.

Los conjuntos los vamos a representar por letras mayúsculas y sus elementos por letras minúsculas dentro de una llave, separados por coma.

EJEMPLO

$A=\{a, b, c\}$; $B=\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Un conjunto se puede especificar de dos maneras:

1.- Por Extensión

Enumerando todos sus elementos, es decir, haciendo una lista de sus elementos.

EJEMPLO

$$C=\{a, e, i, o, u\}$$

2.- Por Comprensión

Enunciando las propiedades que deben tener sus elementos.

EJEMPLO

$$B=\{x/x \text{ es un número par}\}$$

1.1.1.1.- Pertenencia

Si un objeto x es elemento de un conjunto A, se escribe $x \in A$. Si x no es elemento del conjunto A, se escribe $x \notin A$.

EJEMPLOS

Si A={m, n, p}, entonces

1.- $m \in A$
2.- $r \notin A$

1.1.1.2.- Conjunto Finito

Un conjunto finito es aquel en que la operación de contar sus elementos tiene fin.

EJEMPLO

A = {Los meses del año}

1.1.1.3.- Conjunto Infinito

Un conjunto es infinito, si la operación de contar sus elementos no acaba.

EJEMPLO

$C=\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

1.1.1.4.- Conjuntos Iguales

Un conjunto *A* es igual a un conjunto *B*, si tienen la misma cantidad de elementos, y si cada elemento de *A* pertenece a *B* y cada elemento de *B* pertenece a *A*. Se escribe $A = B$.

EJEMPLO

$$A=\{1,2,3,4,5\} \text{ y } B=\{2,1,5,4,3\},$$

$$A = B$$

El orden de los elementos de un conjunto no lo altera.

EJEMPLO

$$A = \{a,c,b,e,d\} \text{ y } B = \{c,a,e,d,b\},$$

$$A = B$$

1.1.1.5.- Conjunto Vacío

Es aquel que no tiene elementos y se representa por $\emptyset$ y $\{\ \}$.

1.1.1.6.- Subconjunto

Si todo elemento de un conjunto *A* es también elemento de un conjunto ***B***, pero no todos los elementos de ***B*** son elementos del conjunto *A*, entonces *A* es un subconjunto propio de ***B*** y se escribe $A \subset B$: Si *A* no es subconjunto de ***B***, se escribe $A \not\subset B$.

EJEMPLOS

1) $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ entonces $A \subset B$

2) Si $A = \{x, y\ z\}$ y $B = \{x, m, n\}$, entonces $A \not\subset B$

Si *A* es subconjunto de ***B***, entonces ***B*** es un superconjunto de *A* y se escribe $B \supset A$. Si ***B*** no es superconjunto de *A* se escribe $B \not\supset A$.

EJEMPLO

$A = \{a, b, c\}$; $B = \{a, b, c, d, e\}$

$$B \supset A$$

1.1.1.1.6.1.- Definición

Dos conjuntos A y B son iguales sí y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

EJEMPLO

$A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{5, 1, 3\}$,
entonces $A \subset B$ y $B \subset A$,
luego $A = B$

1.1.1.7.- Subconjunto Impropio

Todo conjunto es subconjunto de si mismo y se llama subconjunto impropio.

Por definición el conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos, pero no de sí mismo.

1.1.1.8.- Comparabilidad

Dos conjuntos A y B son comparables si uno de los dos es subconjunto del otro; $A \subset B$ o $B \subset A$. En caso contrario no son comparables, o sea, $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$.

EJEMPLOS

1) $A=\{a, b\}$; $B = \{a, b, c\}$. Son comparables porque $A \subset B$.
2) $C=\{a, b\}$; $D=\{b, c, d\}$. No son comparables porque $C \not\subset D$ ni $C \not\subset D$.

1.1.1.9.- Conjunto de Conjuntos

A veces los elementos de un conjunto son a su vez conjuntos, y se les llaman Familia o Clase de conjuntos. Se representan por letras inglesas: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

EJEMPLOS

$\mathfrak{A} = \{\{x,y\}, \{y\}, \{x\}\}$. Es una familia.

$\mathfrak{B} = \{\{3,4\}, \{5\}, \{6\}\}$. Es una familia.

$C = \{4, \{5\}, \{6,7\}\}$. No es una familia.

1.1.1.10.- Conjunto Universal

En la teoría de conjuntos es muy probable que los conjuntos que vamos a utilizar sean subconjuntos de un conjunto dado, llamado Conjunto Universal. Se denota por U.

1.1.1.11.- Conjunto Potencia

La familia de todos los subconjuntos de un conjunto S, se llama conjunto potencia de S y se representa por 2^S.

EJEMPLO

Si $S=\{1,2,3\}$. Hallar 2^S

$$2^S=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \emptyset\}$$

1.1.1.12.- Conjuntos Disjuntos

Dos conjuntos A y B son disjuntos si no tienen elementos comunes, es decir, si ningún elemento de A esta en B y ningún elemento de B esta en A.

EJEMPLOS

1) $A=\{1,3,7,8\}$ y $B=\{r,s,t\}$, son disjuntos

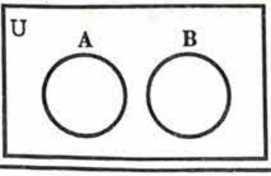
2) $C=\{x,y,z\}$ y $D=\{x,m,n\}$, no son disjuntos

1.1.1.13.- Diagramas de Venn y Euler

Con estos diagramas se ilustran relaciones entre conjuntos, representando los conjuntos mediante una superficie plana limitada.

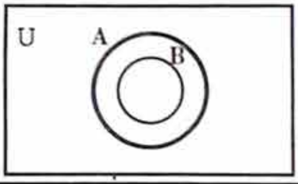
EJEMPLOS

1.-



Disjuntos

EJEMPLOS

2.- 

$B \subset A$

1.2.- Operaciones Entre Conjuntos

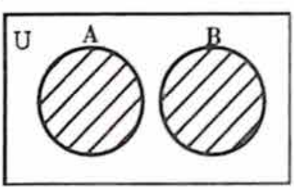
1.2.1.- Unión ($\cup$)

La unión de dos conjuntos A y B, que se escribe $A \cup B$, es otro conjunto cuyos elementos pertenecen a A o B, o a ambos.

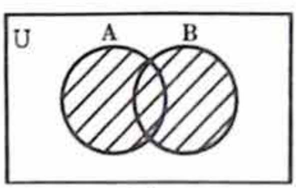
EJEMPLO

Simbólicamente: $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

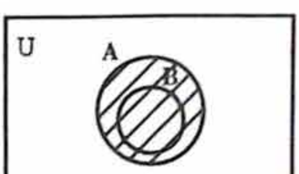
Diagramas:



$A \cup B$



$A \cup B$



$A \cup B$

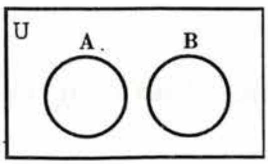
1.2.2.- Intersección ($\cap$)

La intersección de dos conjuntos A y B, que se escribe $A \cap B$, es otro conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B.

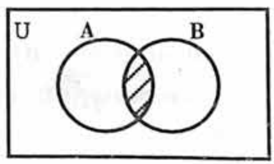
EJEMPLO

Simbólicamente: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$

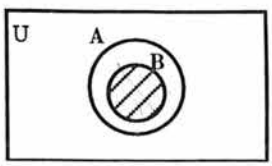
Diagramas:



$A \cap B = \emptyset$



$A \cap B$



$A \cap B$

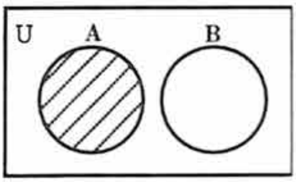
1.2.3.- Diferencia (–)

La diferencia de dos conjuntos A y B es otro conjunto cuyos elementos pertenecen a A, pero no pertenecen a B. Se escribe $A - B$.

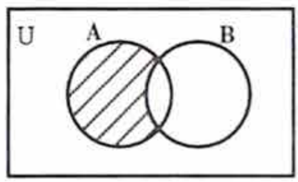
EJEMPLO

Simbólicamente: $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$

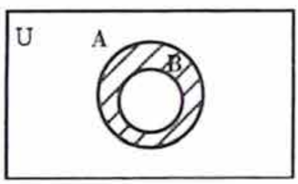
Diagramas:



A – B



A – B



A – B

1.2.4.- Complemento ('):

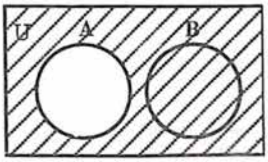
El complemento de un conjunto A es otro conjunto cuyos elementos no pertenecen al conjunto A. Se escribe A'.

EJEMPLO

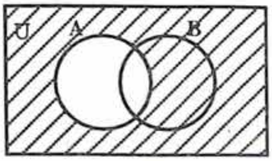
Simbólicamente: $A - B = \{x/x \notin A\} = U - A$

EJEMPLO

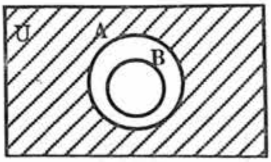
Diagramas:



A'



A'



A'

1.3.- Leyes del Algebra de Conjuntos

1.3.1.- Idempotente

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

1.3.2.- Conmutativa

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

1.3.3.- Asociativa

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

1.3.4.- Distributiva

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1.3.5.- D'Morgan

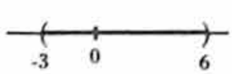
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

1.4.- Intervalos

1.4.1.- Intervalo

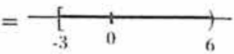
Un intervalo es un conjunto de números comprendidos entre otros dos, inclusive o no.

EJEMPLOS

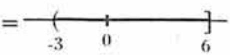
$A_1 = \{x/-3 < x < 6\} = (-3,6) =$ 

Abierto

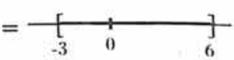
EJEMPLOS

$A_2 = \{x/-3 \leq x < 6\} = [-3,6) =$ 

Cerrado a la izquierda

$A_3 = \{x/-3 < x \leq 6\} = (-3,6] =$ 

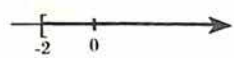
Cerrado a la derecha

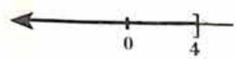
$A_4 = \{x/-3 \leq x \leq 6\} = [-3,6] =$ 

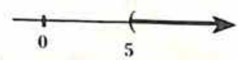
Cerrado

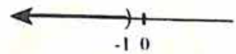
1.4.2.- Intervalos Infinitos

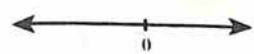
EJEMPLOS

$A_1 = \{x/x \geq x\ -2\} = [-2, \infty) =$ 

$A_2 = \{x/x \leq 4\} = (-\infty, 4] =$ 

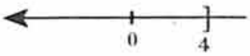
$A_3 = \{x/x > 5\} = (5, \infty) =$ 

$A_4 = \{x/x < -1\} = (-\infty, -1) =$ 

$A_5 = \{x/x \in \mathbf{R}\} = (-\infty, \infty) =$ 

Ejercicios

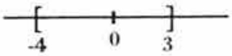
Expresar estos intervalos en las otras dos formas

1) 

2) $\{x/-3 \leq x \leq 1\}$

3) $(-\infty, -3)$

4) $[-2, \infty)$

5) 

6) $\{x/x \geq -1\}$

1.4.3.- Propiedades de los Intervalos

1ro. La intersección de dos intervalos es un intervalo.

2do. La unión de dos intervalos no disjuntos es un intervalo.

3ro. La diferencia de dos intervalos no comparables es un intervalo.

1.4.4.- Operaciones con Intervalos

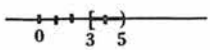
Ejercicios

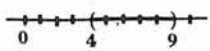
EJEMPLO

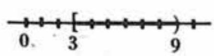
Si A = [3, 5) y B = (4, 9). Hallar:

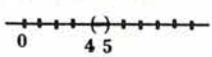
1) $A \cup B$ 3) $A - B$

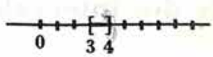
2) $A \cap B$ 4) $B - A$

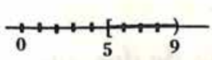
A= 

B= 

1) $A \cup B =$ 

2) $A \cap B =$ 

3) $A - B =$ 

4) $B - A =$ 

Ejercicio # 1. Unidad No. 1

I.-¿Cómo están especificados los siguientes conjuntos?

1) {Las vocales}
2) {x/x es un número par}
3) {2,5,8,9}
4) $\{x/x^2 - 6x + 5 = 0\}$
5) $\{x/x = -3\}$

II.Si $U = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$A = \{1,2,4,5,8\}$

$B = \{2,3,5,6,9\}$

$C = \{1,4,7,8,9\}$

Hallar:

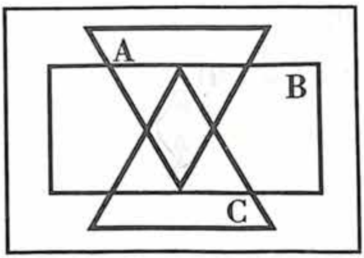
1) $A - B$
2) $B - C$
3) $A' \cap B'$
4) $(A \cup B)'$
5) $A \cap (B \cup C)$
6) $(B \cap C)'$
7) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

8) $A \cap (B' \cup C')$

9) $(A - B)' \cup (B - C)'$

10) $(A' \cap B') \cup C$

III. Si



Rayar:

1) $A \cap B$
2) $B \cup C$
3) $A \cap B \cap C$
4) $A - B$
5) $B - C$
6) $A \cap (B \cup C)$
7) $A \cup (B \cap C)$
8) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
9) $A \cup B \cup C$
10) $(A - C) \cap B$

IV.- Escriba la ley aplicada

1) $A \cap A = A$
2) $B \cup A = A \cup B$
3) $C \cap (D \cap E) = (C \cap D) \cap E$
4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5) $(D \cup E)' = D' \cap E'$
6) $(P \cap Q)' = P' \cup Q'$
7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8) $P \cup P = P$

V.- ¿Qué operación entre conjuntos significa?

1) $\{x/x \notin A\}$

2) $\{x/x \in P \wedge x \in Q\}$

3) $\{x/x \in B \vee x \in C\}$

4) $\{x/x \in C \wedge x \notin D\}$

VI.- a) Si $A = \{a,b,c,d\}$ Hallar 2^A
b) $P = \{x,y,z\}$ hallar 2^P

VII.- Si A, B, C son tres conjuntos, expresar las siguientes leyes entre ellos:

1) Idempotente de la Unión
2) Conmutativa de la intersección.
3) Distributiva de la Unión con respecto a la intersección
4) Asociativa de la Unión
5) De D' Morgan con respecto a la Unión

VIII.- ¿A que es igual?

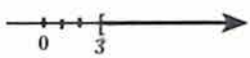
1) (A')
2) $A \cap A$
3) $A \cap \emptyset$
4) $P \cup P$
5) $X \cap U$
6) $(P \cup Q)'$
7) $(M \cap N)'$
8) $B \cup \emptyset$
9) $C \cap C'$
10) $M' \cup M$

11) $X \cup U$

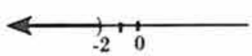
12) $\emptyset'$

IX.- Escribir los siguientes intervalos en las otras dos formas

1.- $\{x/x \leq -6\}$

2.- 

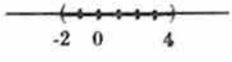
3.- $[-3, 4]$

4.- 

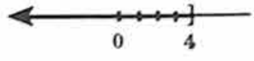
5.- $\{x/ -3 \leq x \leq 6\}$

6.- $(-\infty , -5)$

7.- $\{x/x \geq -1\}$

8.- 

9.- $[-2 , \infty)$

10.- 

X.- Si $A = [-3, 7]$ y $B = (4, 10)$, **Hallar:**

1) $A - B$
2) $B - A$
3) $A \cap B$
4) $A \cup B$

XI.- Escribir los siguientes conjuntos en forma más simple.
U = Reales.

1) $\{x / x^2 - 3x + 2 = 0\}$

2) $\{x / x^2 = -9\}$

3) $\{x / 3x = 18\}$

4) $\{x / x^3 = -8\}$

5) $\{x / 4x^2 = 36\}$

6) $\{x / x = -2x\}$

7) $\{x / 2x^2 + x = 0\}$

8) $\left\{x/\sqrt{-x}=3\right\}$

9) $\{x/x$ es impar$\}$

10) $\{x/x^2-4x-5=0\}$

XII.- **Si** $A=\{x/x^2-36=0\}$; $B=\{x/x^2+6x=0\}$,
Hallar:

1) $A\cap B$

2) $A\cup B$

XIII. **Si** $A=\{x/x^2-x-6=0\}$; $B=\{x/x^2+x-2=0\}$
$C=\{x/x^2-4x+3=0\}$, **Hallar:**

1) $A\cap B$
2) $A\cup B$
3) $A\cup C$
4) $A\cap C$
5) $A-C$
6) $B\cup C$
7) $B\cap C$

8) $B - A$

9) $B - C$

10) $C - A$

XIV.- Si $A = \{x/x \geq -2\}$; $B = \{x/x \leq 5\}$, hallar

1) $A \cap B$

2) $B \cup A$

3) $A - B$

4) $B - A$

XV.-

1) Si $A \subset B$, ¿que relación hay entre A y $A \cap B$?

2) Si $A \subset B$, ¿que relación hay entre A y $A \cup B$?

3) Si $A \cap B = \emptyset$, ¿Cómo son los conjuntos A y B?

4) Si $A \cup B = U$, ¿A quién es igual A'?

1.5.- Proposiciones

Una proposición es un juicio al que se le puede asignar con toda exactitud los términos de verdadero o falso, pero no ambos a la vez.

Las proposiciones las vamos a representar por letras minúsculas p, q, r, s, etc. Y para falso y verdadero las letras F y V, que se llaman **Valores de Verdad**. Por lo tanto cada proposición tiene un valor de verdad que es V o F, pero no ambos a la vez.

1.5.1.-Función Proposicional

Una expresión de la forma $x^2 + 3x + 2 = 0$, no es una proposición ya que no le podemos asignar un valor de verdad. No sabemos si es falso o verdadero.

Si el conjunto U son los reales, y si sustituímos a x por cualquier elemento del conjunto U tendremos:

para $x = 0$

$$0^2 + 3(0) + 2 = 0$$

$$2 = 0 \text{ falso}$$

para $x = -1$

$$(-1)^2 + 3(-1) + 2 = 0$$

$$1 - 3 + 2 = 0$$

$$3 - 3 = 0$$

$$0 = 0 \text{ verdadero}$$

1.1.5.1.- Forma Proposicional

Una ***Forma Proposicional*** es una expresión que contiene una variable y ésta se convierte en una proposición cuando se sustituye la variable por un elemento del conjunto universal.

Una variable es un símbolo que se puede sustituir por cualquier elemento del conjunto U, y se acostumbra a representarla por las letras x, y, z.

Las funciones proposicionales se van a representar de la siguiente manera: px , qx, rx, en donde x es la variable implicada.

1.5.2.- Conjunto Verdad de una Función Proposicional (p_x)

Es el conjunto de todos los valores de x que pertenecen al conjunto U y hacen que la proposición sea verdadera y se representa por $\{x/px\} = P$.

EJEMPLOS

1) Si px: $x + 2 = 0$, hallar $\{x/px\} = P$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

EJEMPLOS

2) Si qx: $x^2 - 1 = 0$, hallar: $\{x/qx\} = Q$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$x = \pm 1$$

$$Q = \{-1, 1\}$$

3) Si rx: $x^2 + x - 6 = 0$, hallar $\{x/rx\} = R$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$R = \{-3, 2\}$$

1.5.3.- Conjunción ($\wedge$); $p \wedge q$

Existen enunciados de la forma p y q llamado conjunción.

La verdad de una conjunción satisface la condición siguiente: es verdadera si p y q son verdaderas, en caso contrario es falsa.

Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conjunto de Verdad

$\{x/px \wedge qx\} = P \cap Q$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Dé la verdad de:

1.- $8 + 2 = 10$ y $5 + 3 = 9$ F

2.- $5 - 4 = 3$ y $6 + 1 = 8$ F

3.- $5 + 4 = 9$ y $2 + 3 = 5$ V

4.- $6 - 1 = 4$ y $4 + 3 = 6$ F

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- Si px: $x^2 - 5x=0$; qx: $x^2 - 25=0$,

formar la conjunción y hallar $\{x/px \wedge qx\}$

Solución:

$(x^2 - 5x = 0) \wedge (x^2 - 25 = 0)$ $\{x/px \wedge qx\} = P \cap Q$

$x(x-5)=0$	$(x+5)(x-5)=0$
$x=0$	$x+5=0$
$x-5=0$	$x=-5$
$x=5$	$x-5=0$
$P=\{0, 5\}$	$x=5$
	$Q=\{-5, 5\}$

$P \cap Q=\{5\}$

1.5.4.- Disyunción ($\vee$)

Existen enunciados de la forma p v q, llamados *Disyunción.*

La verdad de la disyunción satisface la condición siguiente: Es verdadera si ambas son verdaderas o una de ellas es verdadera, en caso contrario es falsa.

Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjunto de Verdad

$\{x/px \vee qx\} = P \cup Q$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Determine la verdad de:

1.-	$4 - 1 = 8$	ó	$6 + 1 = 7$	V
2.-	$3 - 3 = 0$	ó	$4 + 1 = 5$	V
3.-	$6 - 1 = 0$	ó	$2 + 3 = 8$	F
4.-	$7 + 2 = 9$	ó	$4 + 1 = 7$	V

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- Si px: $x^2 - x - 6 = 0$; qx: $x^2 - 1 = 0$,

formar la disyunción, hallar: $\{x/px \vee qx\}$

Solución:

$$(x^2 - x - 6) \quad \vee \quad (x^2 - 1 = 0)$$

$x^2 - x - 6 = 0$	$x^2 - 1 = 0$
$(x - 3)(x + 2) = 0$	$x^2 = 1$
$x - 3 = 0$	$x = \pm\sqrt{1}$
$x = 3$	$x = \pm 1$
$x + 2 = 0$	$Q = \{-1, 1\}$
$x = -2$	
$P = \{3, -2\}$	

$$\{x/px \vee qx\} = P \cup Q = \{-2, -1, 1, 3\}$$

1.5.5.- Negación (~)

La negación de una proposición es otra proposición que tiene como verdad el opuesto.

La verdad de la negación satisface la condición siguiente: Si p es verdadero, ~p es falso, y si p es falso, ~p es verdadero.

Su tabla de verdad es la siguiente:

p	~p
V	F
F	V

Conjunto de Verdad

$\{x/\sim px\} = P'$

Ejercicios

EJEMPLO

Si px: $x^2-3x-10=0$, formar la negación y

hallar: $\{x/\sim px\}$

Solución:

$$\sim px: x^2 - 3x - 10 \neq 0$$
$$px: x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$(x + 2)(x - 5) = 0$$
$$x + 2 = 0$$
$$x_1 = -2$$
$$x - 5 = 0$$
$$x = 5$$
$$P = \{-2, 5\}$$

$$\{x/\sim px\} = P' = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq -2,5\}$$

1.5.6.- Implicación (→) Condicional

Es una proposición formada por dos proposiciones de la forma siguiente: "Si p, entonces, q" ($p \rightarrow q$).

La verdad de la implicación satisface la condición siguiente: Es verdadera salvo el caso que la primera proposición sea verdadera y la segunda sea falsa.

Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conjunto de Verdad

$\{x/px \rightarrow qx\} = P' \cup Q$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Determine la verdad

1.- Si $8+3 = 5$, entonces $4+7 = 3$ V

2.- Si $5+4 = 9$, entonces $2+4 = 9$ F

3.- Si $5+4 = 7$, entonces $2+3 = 5$ V

4.- Si $3+5 = 8$, entonces $2+3 = 5$ V

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- Si px: $x^2 - 9 = 0$; qx: $x = 3$, formar la implicación y hallar: $\{x/px \to qx\}$

Solución:

$$(x^2 - 9 = 0) \quad \to \quad (x = 3)$$

$$x^2 - 9 = 0 \qquad x = 3$$

$$(x + 3)(x - 3) = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$P = \{-3, 3\}$$

$$P' = \{x/x \in R \wedge x \neq -3, 3\}$$

$$Q = \{3\}$$

$$\{x/px \to qx\} = P' \cup Q = \{x/x \in R \wedge x \neq -3\}$$

1.5.7.- Equivalencia ($\leftrightarrow$) Bicondicional $p \equiv q$, $p \leftrightarrow q$

Existen enunciados de la forma "p, si y sólo si, q" llamados equivalencia.

La verdad de la equivalencia satisface la condición siguiente: Es verdadera si p y q tienen igual verdad, en caso contrario es falso.

Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Conjunto de Verdad

$$\{x/px \leftrightarrow qx\} = (P \cap Q) \cup (P' \cap Q')$$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Determine la verdad de:

1) $4 + 3 = 8$, Sii $2 + 3 = 5$ F

2) $6 - 1 = 5$, Sii $4 + 2 = 6$ V

Ejercicios

EJEMPLOS

3) $8 - 4 = 9$, Sii $5 + 3 = 6$ V

4) $5 + 2 = 7$, Sii $2 + 3 = 8$ F

2.- Si px: $x^2 - 9 = 0$; qx: $x = 3$, formar el bicondicional y hallar el conjunto de verdad de: $\{x/px \leftrightarrow qx\}$

Solución:

$$(x^2 - 9 = 0) \quad \leftrightarrow \quad (x=3)$$

$$(x + 3)(x - 3) = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$P = \{-3, 3\}$$

$$Q = \{3\}$$

$$P' = \{x/x \in R \wedge x \neq -3, 3\}$$

$$Q' = \{x/x \in R \wedge x \neq 3\}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$P \cap Q = \{3\}$$

$$P' \cap Q' = \{x/x \in R \wedge x \neq -3,3\}$$

$$\{x/px \leftrightarrow qx\} = (P \cap Q) \cup (P' \cap Q') = \{x/x \in R \wedge x \neq -3\}$$

1.5.8.- Fórmula

1.5.8.1.- Definición

Una fórmula es una expresión que contiene un número finito de variables p, q, r; y un número finito de operaciones lógicas: $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ y que se convierte en una proposición cuando se sustituyen las variables por proposiciones específicas.

1.5.9.- Tautología

1.5.9.1.- Definición

Tautología es una fórmula que es siempre una proposición verdadera cuando se sustituyen sus variables por proposiciones de cualquier valor de verdad. Es decir, cuando en su tabla de verdad, en la última columna solo aparece la letra V.

EJEMPLOS

1.- $\sim [p \wedge (\sim p)]$

p	~ p	p ∧ (~ p)	~ [p ∧ (~ p]
V	F	F	V
F	V	F	V

Tautología

2.- $\sim [p \wedge (\sim q)]$

p	q	~q	p ∧ (~ p)	~ [p ∧ (~ p)]
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

No es Tautología, es Contingencia

Dos fórmulas r y s se llaman equivalentes si y sólo si el valor de verdad de r es igual al valor de verdad de s, cualquiera que sea que sus tituya a sus respectivas variables, Es decir, deben tener tablas de verdad idénticas.

Dos fórmulas r y s son equivalentes sí y sólo si r ↔ s es una tautología.

EJEMPLOS

Determine si $p \leftrightarrow q$ es equivalente a $[p \wedge q] \vee [(\sim p)\ (\sim q)]$

1) Determinando si sus tablas son idénticas.
2) Por medio de tautología.

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	~p	~q	p ∧ q	(~p)∧(~q)	[p∧q]∨[(~p)∧(~q)]
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Son equivalentes

EJEMPLOS

$p \leftrightarrow q$	$[p \wedge q] \vee [(\sim p) \wedge (\sim q)]$	$[(p\leftrightarrow q)]\leftrightarrow[(p\wedge q)\vee[(\sim p)\wedge(\sim q)]$
V	V	V
F	F	V
F	F	V
V	V	V

Tautología

Son equivalentes

1.6.- Leyes del Algebra de Proposiciones.

1.6.1.- Leyes de Idempotencia

$$p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$$

1.6.2.- Leyes Asociativas

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

1.6.3.- Leyes Conmutativas

$p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \wedge q \equiv q \wedge p$

1.6.4.- Leyes Distributivas

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

1.6.5.- Leyes de Identidad

$p \vee F \equiv p \qquad p \wedge V \equiv p$

$p \vee V \equiv V \qquad p \wedge F \equiv F$

1.6.6.- Leyes del Complemento

$p \vee \sim p \equiv V \qquad p \wedge \sim p \equiv F$

$\sim \sim p \equiv p \qquad \sim V \equiv F, \sim F \equiv V$

1.6.7.- Leyes de Morgan

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Ejercicio # 2. Unidad No. 1

I.- Si px: $2x + 2 = 0$; qx: $x = 1$, formar conjunción y hallar el conjunto verdad.

II.- Si px: $3x^2 - 27 = 0$; qx: $x^2 - 9 = 0$, formar la disyución y hallar su conjunto de verdad.

III.- Si px: $x^2 - x - 6 = 0$, formar la negación, hallar su conjunto de verdad.

IV.- Si px: $x^2 = 16$; qx: $x = -4$, formar la implicación y hallar su conjunto de verdad.

V.-Si px: $x^2 + 4x + 3 = 0$; qx: $x^2 + 2x - 3 = 0$, formar el bicondicional y hallar su conjunto de verdad.

VI.- Hallar $\{ x/px \wedge qx\}$ en:

1) $(x^2 - 1 = 0) \wedge (x = -1)$
2) $(x^2 - 3x = 0) \wedge (x + 1 = 0)$
3) $\{ x/x \geq 0 \} \wedge \{ x/x < 6 \}$
4) $\{ x/-3 \leq x \leq 5 \} \wedge \{ x/x \geq 0 \}$
5) $(x^2 - 16 = 0) \wedge (x^2 - 3x - 4 = 0)$

VII.- Hallar $\{x/px \vee qx\}$ en:

1) $(x^2 - x - 12 = 0) \vee (x^2 - 9 - 0)$
2) $(x > -2) \vee (x < 4)$
3) $\{ x/-3 \leq x \leq 1 \} \vee \{ x/-1 \leq x \leq 8\}$
4) $(2x^2 - 8 = 0) \vee (x - 2 = 0)$
5) $(x^2 + x = 0) \vee (x^2 - 1 = 0)$

VIII.- Hallar $\{x/\sim px\}$ en:

1) $x^2 - x = 0$
2) $x^2 + 3x - 10 = 0$
3) $x^2 + 3x = 0$
4) $x^2 - x - 20 = 0$
5) $(x + 1)^2 = 0$

IX.- Hallar $\{x/px \rightarrow qx\}$ en:

1) $(x^2 - 7x + 10 = 0) \rightarrow (x^2 - 25 = 0)$
2) $(x^2 - 2x = 0) \rightarrow (x = -2)$
3) $(x^2 + x - 6 = 0) \rightarrow (x^2 - 9 = 0)$
4) $(x^2 - 36 = 0) \rightarrow (x^2 - 7x + 6 = 0)$
5) $(x^2 + 4x + 3 = 0) \rightarrow (x^2 + 2x + 1 = 0)$

X.- **Hallar $\{x/px \leftrightarrow qx\}$ en:**

1) $(x^2 = 6x) \leftrightarrow (x^2 - 36 = 0)$
2) $(x^2 + 5x + 4 = 0) \leftrightarrow (x = 4)$
3) $(x^2 - x - 6 = 0) \leftrightarrow (3x^2 - 12 = 0)$
4) $(x^2 - 16 = 0) \leftrightarrow (x + 4 = 0)$
5) $(x^2 + x - 20 = 0) \leftrightarrow (x^2 - 25 = 0)$

XI.- **Hacer el análisis lógico de:**

1) $\sim [\sim p \wedge \sim q] \rightarrow [p \vee \sim q]$
2) $\sim\sim [\sim p \vee \sim q] \leftrightarrow [\sim q \wedge \sim r]$
3) $p \rightarrow [\{\sim p \wedge \sim q\} \vee \{\sim q \vee \sim r\}]$
4) $(p \wedge q) \leftrightarrow [\sim p \rightarrow (\sim r)]$
5) $\{p \wedge (\sim q \vee \sim r)\} \leftrightarrow [\sim p \wedge (\sim q)]$

XII.- **Enuncia la ley aplicada:**

1) $p \wedge p \equiv p$
2) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
3) $p \vee p \equiv p$
4) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
5) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

XIII.- Hallar el valor de verdad de:

1) $4 + 3 = 7$ ó $2 - 1 = 8$
2) Si $4 - 1 = 3$, entonces $3 + 4 = 9$
3) $4 - 2 = 2$, sii $2 + 1 = 7$
4) $6 + 4 = 10$, y $2 + 1 = 8$
5) $3 - 5 = -2$, ó $2 + 4 = 6$
6) $3 - 4 = 1$ y $2 + 1 = 3$
7) Si $6 - 2 = 9$, entonces $2 + 3 = 5$
8) $4 + 1 = 7$, sii $2 + 6 = 8$

XIV.- Usar las tablas de verdad para determinar cuales de las siguientes proposiciones son tautologías.

1) $[p \leftrightarrow q] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow .p)]$
2) $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
3) $[\sim (p \leftrightarrow q)] \leftrightarrow [p \leftrightarrow (\sim q)]$
4) $\sim [\sim (\sim p) \wedge (\sim q)] \rightarrow [q \vee (\sim r)]$
5) $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

XV.- Usando las tablas de verdad, probar:

1) $\sim V \equiv F$
2) $\sim \sim p \equiv p$
3) $p \wedge V \equiv p$

4) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

5) $p \vee \sim p \equiv V$

6) $p \vee p \equiv p$

7) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

8) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

9) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

10) $p \wedge F \equiv F$

Ejercicios de Repaso UNIDAD No. 1

I.- Determinar la verdad o falsedad de: Explique.

a) Un conjunto está definido por extensión, cuando se enuncia una característica que tienen todos sus elementos ________

b) Para expresar A – B lo puedo escribir de la siguiente manera:
$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$ ________

c) La intersección de dos conjuntos A y B son los elementos de $A \cup B$ o de ambos ________

d) Para indicar que un conjunto B es subconjunto de un conjunto C lo nombramos en la forma siguiente $B \subset C$ ________

e) El conjunto vacío se denota por $\{0\}$ ________

f) $(C')'$ es igual a C ________

g) Simbólicamente $A \cap B$ se escribe $\{ x/x \in A \wedge x \in B\}$ ________

h) Siempre que $A \subset B$, entonces $B \subset A$ ________

i) Todo conjunto es sub-conjunto de sí mismo ________

j) Si A es un conjunto entonces 2^A significa el complemento de A ________

II.- Escribir 10 conjuntos, 5 por extensión y 5 por comprensión.

III.- Dado los siguientes conjuntos escribirlos en forma más simple.

1) $A=\{x/x \text{ es una vocal}\}$
2) $B=\{x/x^2 = -1\}$
3) $C=\{x/x^2 - x - 4 = 0\}$
4) $D=\{x/x \text{ es un número par}\}$
5) $E=\{x/x \text{ es un número impar}\}$

IV.- Determine cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1) $\{ 0 \} = \emptyset$ ________
2) $\{ E\} = \{4\}$ ________

3) $A \subset A$ ________
4) $P' \cup P = U$ ________
5) $7 \in \{ 7 \}$ ________
6) $(P')' = \cup$ ________
7) $x' \cup x = \emptyset$ ________
8) $M \cap M = M$ ________
9) $A' = U - A$ ________
10) $U - B = U$ ________

V.-Determine la verdad de:

1) Una proposición puede ser falsa y verdadera al mismo tiempo.
2) El valor de verdad de $\sim p$ es siempre igual al valor de verdad de P.
3) Si en $p \rightarrow q$, p es falsa y q es falsa entonces $p \rightarrow q$ es verdadera
4) $(p \vee q) \equiv \sim p \vee \sim q$
5) $\{x/px\} = P$
6) $qx = \{x/qx\}$
7) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
8) En $p \wedge q$, para que sea verdadera como tienen que ser los valores de verdad de p y q.
9) Qué significado tiene $\{ x/px \rightarrow qx\}$
10) $\sim\sim p = p$

VI.- Escriba la tabla de verdad de:

1) $p \wedge q$
2) $p \vee q$
3) $\sim p$
4) $p \rightarrow q$
5) $p \leftrightarrow q$

VII.- Hacer el análisis lógico de:

1) $(p \vee q) \wedge (p \wedge \sim r)$
2) $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (\sim p \vee \ \sim r)$
3) $(\sim p \rightarrow \sim q) \wedge (p \leftrightarrow \sim r)$
4) $\sim(\sim p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow q$
5) $(q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

VIII.- Enuncia la ley aplicada.

1) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee q$
2) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
3) $p \vee q = q \vee r$
4) $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
5) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q\backslash$

IX.- Si te piden hallar 2^A , ¿Qué es lo que debe hallar?

X.- Si $A \subset B$, ¿qué será $A \cap B$ de A.

XI.- Si $A - B = \emptyset$, ¿qué relación hay entre A y B?

XII.- Cuando $A \cap B = \emptyset$, es porque A y B son

____

XIII.- ¿Cuál es el conjunto cuyo complemento es el universo?

XIV.- Si $A \cup B = \emptyset$ y $A = \emptyset$, ¿a qué es igual B?

XV.- Si A y B son comparables, ¿qué relación existe entre A y B.

XVI.- Si p es falsa, q es verdadera y r es verdadera determina el valor de verdad de:

1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2) $(r \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim r)$
3) $[(q \wedge p) \rightarrow (r \vee p)] \leftrightarrow q$
4) $[(q \wedge p) \vee (q \vee p)] \rightarrow (r \vee p)$
5) $(p \leftrightarrow q) \vee (r \rightarrow p)$

UNIDAD No. 2

Desigualdades

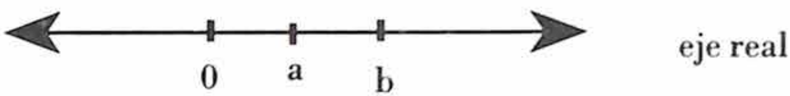
UNIDAD No. 2

Desigualdades

Las desigualdades introducen el concepto de orden en el sistema de los números reales, mediante la siguiente definición:

> El número real *a* es menor que el número real ***b***, y se escribe $a < b$, si $b - a > 0$ (positivo).

EJEMPLO



Todo número que esté a la izquierda de otro en el eje real es menor.

2.1.- Propiedades de las Desigualdades

Sean a, b y c tres números reales, tenemos:

1.- $a = b$, $a < b$, $b < a$.

2.- Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$ (transitiva).

3.- Si $a < b$, entonces $a \pm < b \pm c$.

Si a ambos miembros de una desigualdad se le suma o se le resta el mismo número, la desigualdad queda del mismo sentido.

4.- Si $a < b$ y c es positivo: $c > 0$, entonces $ac < bc$.

5.- Si $a < b$ y $c < 0$ (negativo), entonces $ac > bc$.

Si se multiplican ambos miembros por un número negativo se le cambia el sentido a la desigualdad.

6.- Si $a < b$ y $c > 0$ (positivo), entonces $a/c < b/c$.

7.- Si $a < b$ y $c < 0$ (negativo), entonces $a/c > b/c$.

Se le cambia el sentido a la desigualdad.

2.1.1.- Inecuación

Es una desigualdad que contiene variables.

EJEMPLO

Resolver y hacer la gráfica del conjunto solución.

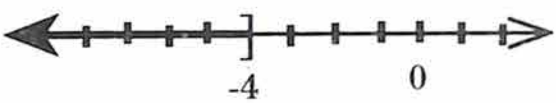
$$-x-2x \geq 12$$

$$-3x \geq 12$$

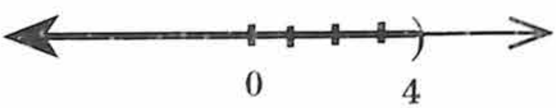
$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{12}{-3}$$

$$x \leq -4$$

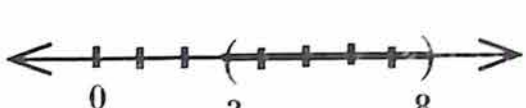
$$\{x/x \leq -4\}$$



La relación $x < 4$, significa que x está a la izquierda de 4 sobre la recta real.



La relación $3 < x < 8$, significa que x está a la derecha de 3 y a la izquierda de 8. En la recta real.



2.1.2.- Valor Absoluto

El valor absoluto de un número real, es el valor que representa el número sin tener en cuenta el signo, y se expresa de la siguiente manera: $/x/$.

EJEMPLO

$/7/ = 7$

$/-7/ = 7$

$/x/ = 4$

$x = 4$ ó -4

No hay ningún número que su valor absoluto dé negativo.

El valor absoluto de un número x se define de la siguiente manera:

$$/x/ \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \ (\text{positivo}) & /x/ = x \\ -x, \text{ si } x < 0 \ (\text{negativo}) & /x/ = x - (-x) \end{cases}$$

$/x/ = 5$ $x = 5$ ó -5 $\{-5, 5\}$

2.1.3.- Distancia Entre Dos Puntos

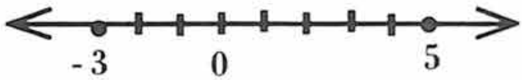
La distancia entre los puntos a y b sobre la recta real es $d = /a - b/ = /b - a/$.

EJEMPLOS

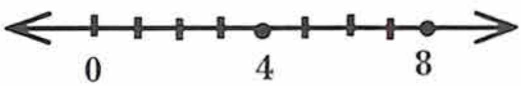
Ejercicios

I.- Hallar la distancia:

1) De 5 a -3; d= /5 –(–3)/ = /5 + 3/ = /8/ = 8



2) De 8 a 4; d= /8 - 4/ = /4/ = 4



3) De –7 a 2; d= /–7 - 2/ = /–9/ = 9

2.1.4.- Significado Geométrico de:

/x/ = 2 Distancia de x al origen igual a 2.

/x – 3/ = 5 Distancia de x al punto 3 igual a 5.

/x + 2/ < 8 Distancia de x al punto –2 es menor que 8.

2.1.5.- Inecuaciones con Valor Absoluto

1) $/x/ < a$ 2) $/x/ > a$

$-a < x < a$ $x > a$ o $x < -a$

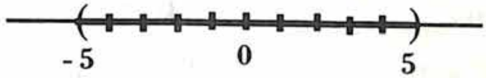
EJEMPLOS

Ejercicios

1) $/ x / < 5$

$-5 < x < 5$

$\{ x / -5 < x < 5 \}$



2) $/ 2x + 2 / < 4$

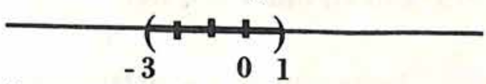
$-4 < 2x + 2 < 4$

$-4 - 2 < 2x < 4 - 2$

$-6 < 2x < 2$

$-3 < x < 1$

$\{ x / -3 < x < 1 \}$



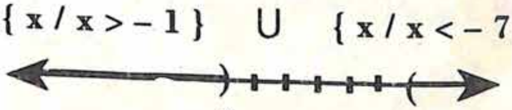
3) $/ x + 4 / > 3$

$x + 4 > 3$ ó $x + 4 < -3$

$x > 3 - 4$ $x < -3 - 4$

$x > -1$ $x < -7$

$\{ x / x > -1 \} \cup \{ x / x < -7$



EJEMPLOS

Ejercicios

4) $/ 3x + 3 / > 6$

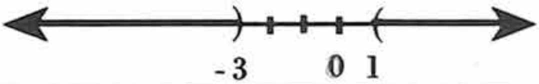
$3x + 3 > 6$ ó $3x + 3 < -6$

$3x > 6 - 3$ $\quad$ $3x < -6 - 3$

$3x > 3$ $\quad$ $\frac{3x}{3} < -9/3$

$x > 1$ $\quad$ $x < -3$

$\{ x / x > 1 \} \cup \{ x / x < -3 \}$



2.1.6.- Inecuación de 2do. Grado con Una Variable

$ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c < 0$

Ejercicios

EJEMPLOS

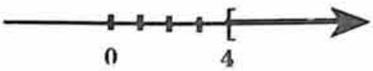
Hacer la gráfica del conjunto solución de:

1) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

$(x-4)(x+2) \geq 0$

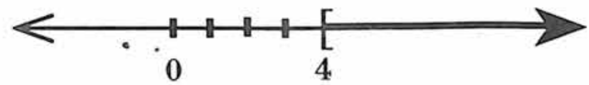
$x - 4 \geq 0$ $\qquad$ $x + 2 \geq 0$

$x \geq 4$ $\qquad$ $x \geq -2$



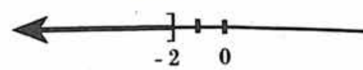
EJEMPLOS

La intersección de esos conjuntos es:

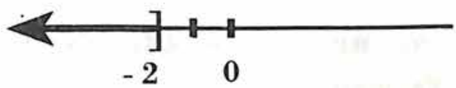


Ahora:

$$x-4 \le 0 \qquad\qquad x+2 \le 0$$
$$x \le 4 \qquad\qquad x \le -2$$



La intersección de esos conjuntos es:

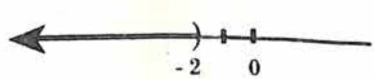


La unión de intersecciones es:

$$\{x / x \le -2\} \quad \text{U} \quad \{x / x \ge 4\}$$

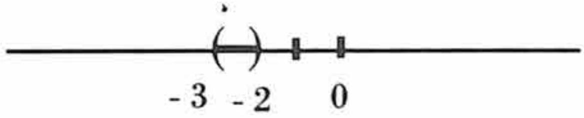
2) $x^2 + 5x + 6 < 0$

$$(x+3)(x+2) < 0$$
$$x+3 > 0 \qquad\qquad x+2 < 0$$
$$x > -3 \qquad\qquad x < -2$$



Ejemplos

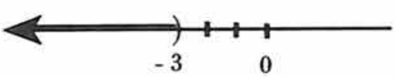
La intersección de esos conjuntos es:

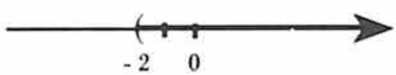


Ahora:

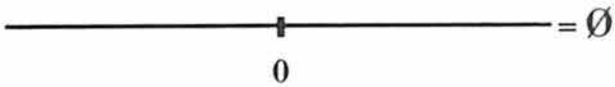
$x+3 < 0$ $\qquad\qquad$ $x+2 > 0$

$x < -3$ $\qquad\qquad$ $x > -2$



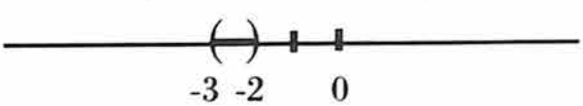


La intersección de esos conjuntos es:



La unión de intersecciones es:

$$\{ x / -3 < x < -2 \}$$



El conjunto solución de $ax^2 + bx + c > 0$, siendo "a" mayor que cero, es el conjunto universal, si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces reales.

2.1.1.- Inecuación de 1er. Grado con Dos Variables

$a\,x + b\,y + c \geq 0 \quad ; \quad a\,x + b\,y + c < 0$

EJEMPLO

Dibujar la gráfica del conjunto solución de:

$3x + 2y - 6 \geq 0$

$$2y \geq -3x + 6$$

$$\frac{2y}{2} \geq \frac{-3x}{2} + \frac{6}{2}$$

$$y \geq \frac{-3x}{2} + 3$$

$$y = \frac{-3x}{2} + 3$$

Para $x = 1$

$$y = \frac{-3}{2}(1) + 3$$

$$y = \frac{-3}{2} + \frac{3}{1}$$

$$y = \frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y = 1\frac{1}{2}$$

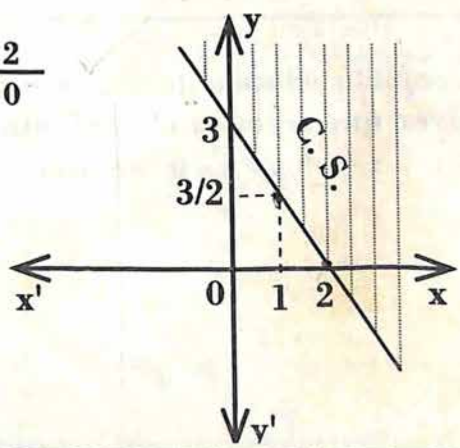
Para $x = 2$

$$y = \frac{-3}{2}(2) + 3$$

$$y = -3 + 3$$

$$y = 0$$

x	1	2
y	3/2	0



2.1.8.- Inecuaciones Lineales Simultáneas

Ejercicios

EJEMPLOS

Dibujar la gráfica del conjunto solución determinados por:

$$\begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix} \begin{cases} 2x + y - 3 > 0 \\ x - 2y + 1 \le 0 \end{cases}$$

1.- $\mathbf{2x + y - 3 > 0}$

$$y > -2x + 3$$
$$y = -2x + 3$$

Para $x = 1$ **Para $x = 2$**

$y = -2(1) + 3$ $y = -2(2) + 3$

$y = -2 + 3$ $y = -4 + 3$

$y = 1$ $y = -1$

x	1	2
y	1	−1

2.- $\mathbf{x - 2y + 1 \le 0}$

$$-2y \le -x - 1$$

$$\frac{-2y}{-2} \ge \frac{-x}{-2} \frac{-1}{-2}$$

$$y \ge \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

Para x = 1

$y = 1/2 + 1/2$

$y = 1$

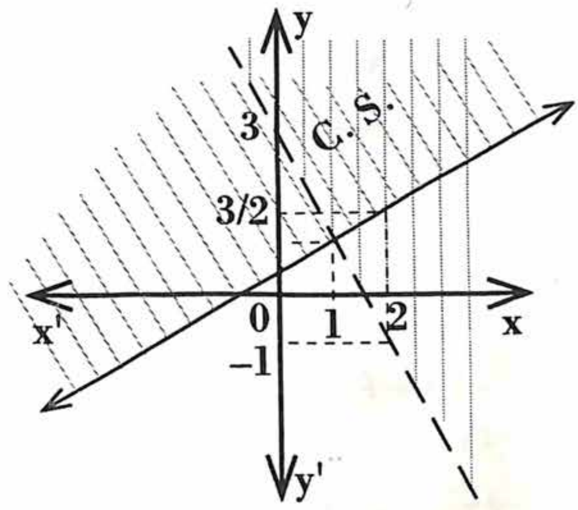
Para x = 2

$y = 2/2 + 1/2$

$y = 3/2$

$y = 1\ 1/2$

x	1	2
y	1	3/2



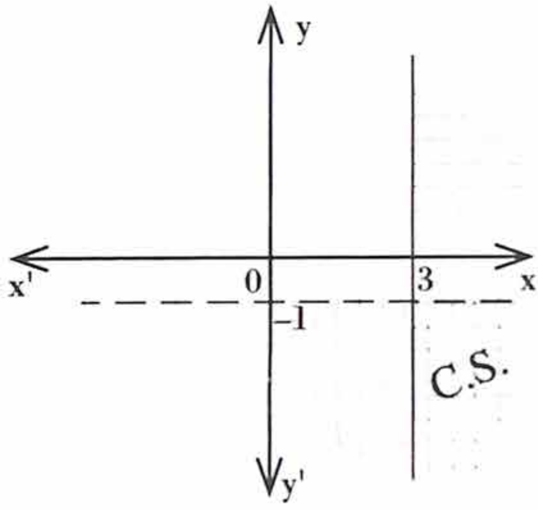
Ejercicios

EJEMPLOS

Hacer la gráfica del conjunto solución en el plano cartesiano de:

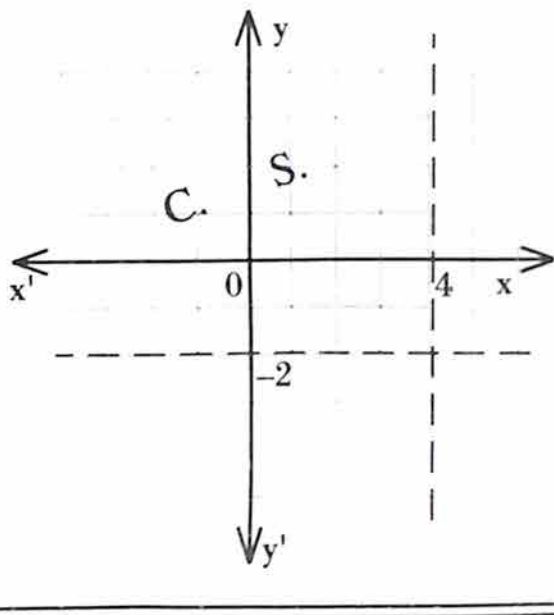
1.- $\begin{cases} x \geq 3 \\ y < -1 \end{cases}$

$x = 3$
$y = -1$



2.- $\begin{cases} y > -2 \\ x < 4 \end{cases}$

$y = -2$
$x = 4$

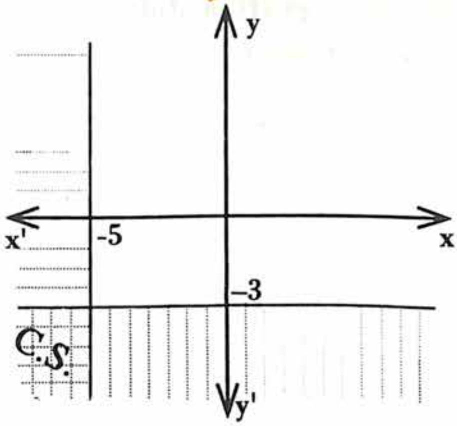


Ejercicios

EJEMPLOS

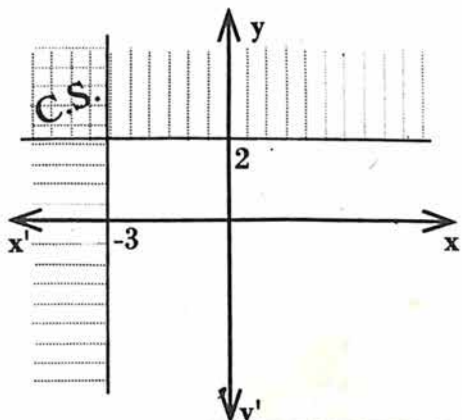
3.- $\begin{cases} x \leq -5 \\ y \leq -3 \end{cases}$

$x = -5$
$y = -3$



4.- $\begin{cases} x \leq -3 \\ y \geq 2 \end{cases}$

$x = -3$
$y = 2$



2.1.9 .- Gráfica de una Inecuacion Cuadrática con Dos Variables

$$y > a\,x^2 + b\,x + c \qquad ; \qquad y \leq a\,x^2 + b\,x + c$$

Ejercicios

EJEMPLO

Dibujar la gráfica del conjunto solución de:

A b C

$y \geq x^2 - 6x + 5$

$y = x^2 - 6x + 5$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3$$

Para $x = 0$

$y = 0^2 - 6(0) + 5$

$y = 5$

Para $x = 1$

$y = 1^2 - 6(1) + 5$

$y = 0$

Para $x = 2$

$y = 2^2 - 6(2) + 5$

$y = -3$

Para $x = 3$

$y = 3^2 - 6(3) + 5$

$y = 4$

Para $x = 4$

$y = 4^2 - 6(4) + 5$

$y = -3$

Para $x = 5$

$y = 5^2 - 6(5) + 5$

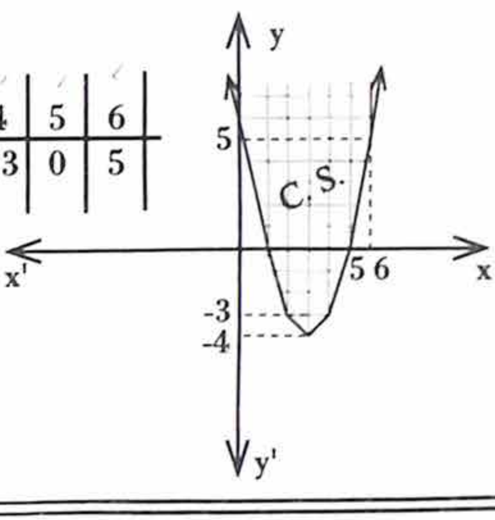
$y = 0$

Para $x = 6$

$y = 6^2 - 6(6) + 5$

$y = 5$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	−3	−4	−3	0	5



Ejercicio

EJEMPLO

Dibujar la gráfica del conjunto solución de:

$y > x^2 - 8x + 12$
$x - y - 2 \geq 0$

1.- $y = x^2 - 8x + 12$

$$x = \frac{-(-8)}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Para x = 0

$y = 0^2 - 8(0) + 12$
$y = 12$

Para x = 1

$y = 1^2 - 8(1) + 12$
$y = 5$

Para x = 2

$y = 2^2 - 8(2) + 12$
$y = 0$

Para x = 3

$y = 3^2 - 8(3) + 12$
$y = -3$

Para x = 4

$y = 4^2 - 8(4) + 12$
$y = -4$

Para x = 5

$y = 5^2 - 8(5) + 12$
$y = -3$

Para x = 6

$y = 6^2 - 8(6) + 12$
$y = 0$

Para x = 7

$y = 7^2 - 8(7) + 12$
$y = 5$

Para x = 8

$y = 8^2 - 8(8) + 12$
$y = 12$

Ejercicios

EJEMPLO

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	12	5	0	−3	−4	-3	0	5	12

2.- $x - y - 2 \geq 0$

$$-y \geq -x + 2$$
$$y \leq +x - 2$$
$$y = x - 2$$

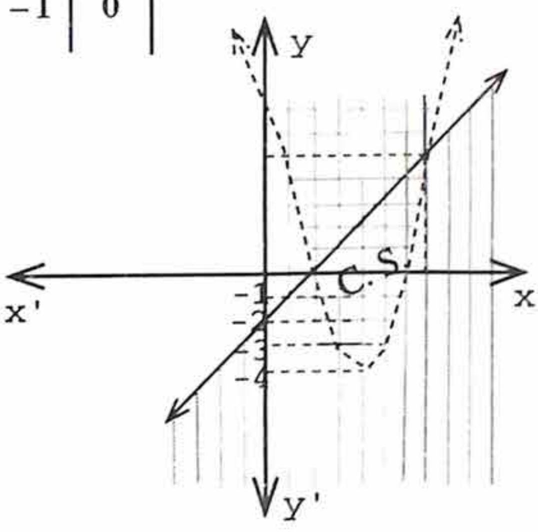
Para x = 0   Para x = 1   Para x = 2

$y = -2$

$y = 1 - 2$
$y = -1$

$y = 2 - 2$
$y = 0$

x	0	1	2
y	−2	−1	0



Ejercicio # 1. UNIDAD # 2.

I.-Resolver las siguientes inecuaciones y hacer la gráfica del conjunto solución.

1.- $-3x-4(-x+2\_\geq -2\{-(-x-1)\}$

2.- $4x+[-(-\{-3x+2\}-4x)-5x]\leq 0$

3.- $3x-5(x-2)\geq -6+2x$

4.- $-x-(-x+2[-3x+1])\geq 0$

II.- Hallar la distancia entre los siguientes pares de puntos.

1.- -3 y 5

2.- 4 y -6

3.- 2 y 9

4.- 5 y -6

5.- -3 y -7

6.- -4 y 0

7.- 8 y 2

8.- -6 y -4

9.- 10 y -1

10.- 11 y -2

III.- Qué valores debe tener x para que se verifique

1.- $/x/ = 6$
2.- $/x/ = 2$
3.- $/x/ = 8$
4.- $/x + 1/ = 5$
5.- $/2x + 6/ = 8$
6.- $/4x - 4/ = 12$
7.- $/x - 2/ = 5$
8.- $/x + 2/ = -3$
9.- $/x/ = 6$
10.- $/3x + 1/ = 10$

IV.- Escribe el significado geométrico de:

1.- $/x/ \leq 6$
2.- $/x/ > 4$
3.- $/x+3/ < 5$
4.- $/x-3/ > 7$
5.- $/2x+1/ < 8$
6.- $/x+1/ \geq 6$
7.- $/x/ = 5$
8.- $/x+2/ = 10$
9.- $/3x-1/ < 6$
10.- $/2x+4/ > 8$

V.-Escribir con notación de valor absoluto.

1.- La distancia del punto x al origen es mayor que 6.
2.- La distancia del punto x al punto –3 es menor que 4.
3.- La distancia del punto x al punto 5 es mayor que 1.
4.- Tres veces la distancia del punto x al punto –6 es mayor que 9.
5.- La distancia del punto x al punto –4 es igual a 0.

VI.- Resolver y graficar el conjunto solución de:

1.- $/2x+4/ < 6$
2.- $/3x-3/ < 9$
3.- $/x+4/ > 5$
4.- $/2x+2/ > 8$
5.- $/x-4/ \geq 9$
6.- $/x/ \leq 5$
7.- $/x/ \geq 6$
8.- $/x-2/ \leq 5$
9.- $/4x+1/ \geq 8$
10.- $/3x-1/ \leq 12$

VII.- Resolver

1.- $x^2 - 3x \leq 0$

2.- $x^2 + 4x + 3 \leq 0$

3.- $x^2 - x \geq 0$

4.- $x^2 - 1 > 0$.

5.- $x^2 - x - 6 \geq 0$

6.- $2x^2 - 3x \leq 0$

7.- $4 - x^2 \geq 0$

8.- $1 - x^2 \geq 0$

9.- $x^2 + 7x + 6 \leq 0$

10.- $x^2 - 4x < 0$

VIII.- Hacer la gráfica del conjunto solución en el plano cartesiano de:

1.- $x \geq -2$

2.- $y \leq 1$

3.- $x + 1 \geq 4$

4.- $y - 2 \leq 4$.

5.- $x - 3 \leq 4$

6.- $2x + 4 \geq --6$

7.- $x \leq 0$

8.- $x \geq 0$

9.- $y \leq 0$

10.- $y > 0$

IX.- Hacer la gráfica del conjunto solución de:

1.- $2x + 3y - 2 > 0$

2.- $-x - 3y - 1 < 0$

3.- $y > x$

4.- $x + 3y - 6 \geq 0$

5.- $2x - y \geq 8$

6.- $-3x + 2y + 1 \leq 0$

7.- $4x + 3y < 6$

8.- $x + y < 0$

9.- $y \leq x$

10.- $-x \geq -y$

X.- Hacer la gráfica del conjunto solución.

1.- $\begin{cases} 2x + y \geq 5 \\ x - 3 \leq 0 \end{cases}$

2.- $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \leq -3 \end{cases}$

3.- $\begin{cases} x + 2 \leq 0 \\ y - 2 \geq 0 \end{cases}$

4.- $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq -x \end{cases}$

5.- $\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x - 1 \leq 0 \\ y \geq -3 \\ y \leq 5 \end{cases}$

6.- $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$

7.- $\begin{cases} 2x - y + 4 \geq 0 \\ -x - y - 1 \leq 0 \end{cases}$

8.- $\begin{cases} x + 3y - 2 \geq 0 \\ -4x + 2y - 1 < 0 \end{cases}$

9.- $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq 2 \\ x \leq 4 \\ y \geq -3 \end{cases}$

10.- $\begin{cases} -x - y - 1 \leq 0 \\ x + 3y + 2 > 0 \end{cases}$

XI.- Hacer la gráfica del conjunto solución:

1.- $y \leq x^2 + 6x + 8$

2.- $y \geq x^2 - 3x - 4$

3.- $y > x^2 + x$

4.- $y < x^2 - 25$

5.- $y \geq x^2 + 5x - 6$

6.- $y \leq -x^2 + 3x - 2$

7.- $y \geq x^2 - 4$

8.- $y < -x^2 + 9$

9.- $y \geq x^2 + x - 6$

10.- $y < x^2 - 4x + 3$

XII.- Hacer la gráfica del conjunto solución de:

1.- $\begin{cases} y \geq x^2 + 6x - 7 \\ y - x + 1 \geq 0 \end{cases}$

2.- $\begin{cases} y \geq 2x - 4 \\ y \leq x^2 - 4x + 5 \end{cases}$

3.- $\begin{cases} y \leq -4x + 2 \\ y \leq x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

4.- $\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq x^2 + 2x - 3 \end{cases}$

5.- $\begin{cases} y \leq -x^2 + 8 \\ y \leq x - 4 \end{cases}$

Ejercicios de Repaso UNIDAD No. 2

I.- Hallar la distancia entre:

1.- -3 y 5
2.- 4 y -8
3.- -3 y -6
4.- 0 y -9
5.- 0 y 8
6.- 12 y 18

II.- Significado geométrico de:

1.- $/4x - 1/ \geq 8$
2.- $/x+3/ \leq 6$
3.- $/2x - 4/ > 4$
4.- $/x/ \leq 6$

5.- $/5x/ \geq 0$

6.- $/3x - 2/ > 7$

III.- Resolver

1.- $/4x - 2/ \geq 8$

2.- $/3x - 3/ \leq 1$

3.- $/2x + 4/ \geq 0$

4.- $/x - 3/ < 6$

5.- $/2x - 1/ > 5$

6.- $/6x - 4/ \geq 5$

IV.- Expresar en Notación de valor absoluto

1.- $-2 < x < 8$

2.- $-8 < x < 6$

3.- $-6 < x < 2$

4.- $-\frac{3}{2} < x < 1$

5.- $-3 < x < 9$

6.- $x \geq 5$ ó $x \leq -5$

7.- $x > 3$ ó $x < -5$

8.- $x > 2$ ó $x < -4$

9.- $x > \frac{56}{3}$ ó $x < -\frac{52}{3}$

V.-Resolver

1.- $2x^2 - 2 \geq 0$

2.- $x^2 - x - 56 \leq 0$

3.- $x^2 - 100 \geq 0$

4.- $4x^2 - 36 \geq 0$

5.- $x^2 - 3x < 0$

6.- $x^2 - 64 \geq 0$

VI.- Hacer la gráfica del conjunto solución en el plano cartesiano

1.- $2x - 3y + 4 \geq 0$

2.- $-x - y + 1 \leq 0$

3.- $-3x + y \geq -6$

4.- $2y \leq -4$

5.- $3x \geq -6$

6.- $-y \leq -x$

VII.- Hacer la gráfica del conjunto solución de:

1.- $\begin{cases} 2x - y \geq 5 \\ 3 + 2y \leq -3x \end{cases}$

2.- $\begin{cases} x \le -2 \\ y \ge -1 \\ y \ge x \end{cases}$

3.- $\begin{cases} 2x - 3y - 7 \ge 0 \\ 3x + 5y - 1 \le 0 \end{cases}$

4.- $\begin{cases} -x - y - 1 \le 0 \\ y + x + 3 > 0 \end{cases}$

5.- $\begin{cases} -x \ge 2 \\ y \le -3 \\ y \ge 4 \\ x \le -1 \end{cases}$

6.- $\begin{cases} -3x - 2y + 1 \le 0 \\ 2x + y - 1 \ge 0 \end{cases}$

VIII.- Hacer la gráfica del conjunto solución de:

1.- $y \le x^2 - 5x + 4$

2.- $y \ge x^2 - x$

3.- $y \le x^2 - 36$

4.- $y \ge x^2 - x - 6$

5.- $y \leq -x^2 - 3x - 2$

6.- $y \geq -2x^2 - 2x - 2$

IX.- Hacer la gráfica del conjunto solución de:

1.- $\begin{cases} y \geq x^2 + 3x - 4 \\ x - y - 1 \geq 0 \end{cases}$

2.- $\begin{cases} y \geq x^2 - 2x - 8 \\ x + y + 1 \geq 0 \end{cases}$

3.- $\begin{cases} y \leq -x^2 \\ y \leq -2 \end{cases}$

4.- $\begin{cases} y \geq x^2 + 6x + 9 \\ y - 2 \geq 0 \end{cases}$

5.- $\begin{cases} y \leq (x - 2)^2 \\ y + 2 \leq 0 \end{cases}$

6.- $\begin{cases} y \geq -x^2 + 2x \\ y \geq -1 \end{cases}$

UNIDAD No. 3

Relaciones

UNIDAD No. 3

Relaciones

3.1.- Pares Ordenados

Un par ordenado consta de dos elementos a y b, y un criterio de ordenación que indica cual es el primero y cual es el segundo y se representa de la siguiente manera: (a,b).

Dos pares ordenados (a,b) y (c,d) son iguales sí y sólo si sus componentes correspondientes son iguales: $a = c$ y $b = d$.

Ejercicios

EJEMPLO

Determinar los valores de x e y si: (x+y, 1)=(3, x−y)

$$\begin{array}{r} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ \hline 2x \quad = 4 \\ x \quad = 4/2 \\ x \quad = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 + y = 3 \\ y = 3 - 2 \\ y = 1 \end{array}$$

3.2.- Conjunto Producto

Si A y B son dos conjuntos, el conjunto producto o producto cartesiano de A y B que se representa por $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados (a,b), de manera que a pertenece a A y b pertenece a B.

EJEMPLO

$$A \times B = \{ (a,b) / a \in A \wedge b \in B \}$$

EJEMPLOS

Ejercicios

1.- Sean: $A = \{ m, n, p \}$; $B = \{ x, y \}$

$A \times B = \{(m,x), (m,y), (n,x), (n,y), (p,x), (p,y)\}$

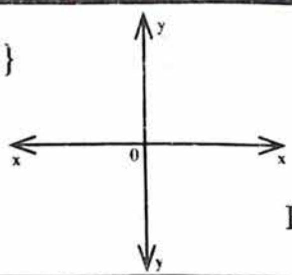
2.- Sea: $M = \{ p, q \}$

$M \times M = \{(p,p), (p,q), (q,p), (q,q)\}$

El conjunto producto de los números reales por sí mismo representa el plano cartesiano.

EJEMPLO

$R \times R = \{(x,y)...\}$



R x R

Si un conjunto A tiene p elementos y un conjunto B tiene q elementos entonces el producto cartesiano $A \times B$ tiene pq elementos.

Si un conjunto A no es vacío y B es vacío, su conjunto producto es vacío.

Si uno de los conjuntos A o B es infinito y el otro no es vacío, entonces $A \times B$ es infinito.

El producto cartesiano de dos conjuntos no es conmutativo. $A \times B \neq B \times A$.

3.3.- Conjunto Producto en General

El conjunto producto puede ser entre más de dos conjuntos.

EJEMPLO

$$A, B, C$$

$$A \times B \times C = \{(a,b,c)/a \in A, b \in B \wedge c \in C\}$$

Si son *n* conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

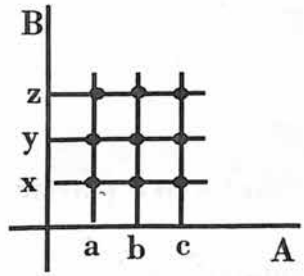
$$A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots, \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)/a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge a_3 \in A_3 \ldots a_n \in A_n\}$$

3.4.- Diagrama Cartesiano del Conjunto Producto

Ejercicios

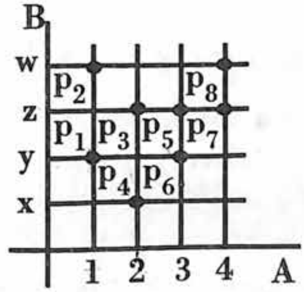
EJEMPLOS

1.-Si A = {a,b,c} ; B = {x,y,z}



A x B = {(a,x), (a,y), (a,z), (b,x), (b,y), (b,z), (c,x), (c,y), (c,z)}

2.-Si A = {1,2,3,4} ; B = {x,y,z,w}



Determinar los pares ordenados que representan estos puntos:

P_1 (1,y) ; P_2 (1,w) ; P_3 (2,z) ; P_4 (2,x) ; P_5 (3,z) ; P_6 (3 y) ; P_7 (4,z) ; P_8 (4,w)

3.5.- Diagrama en Arbol

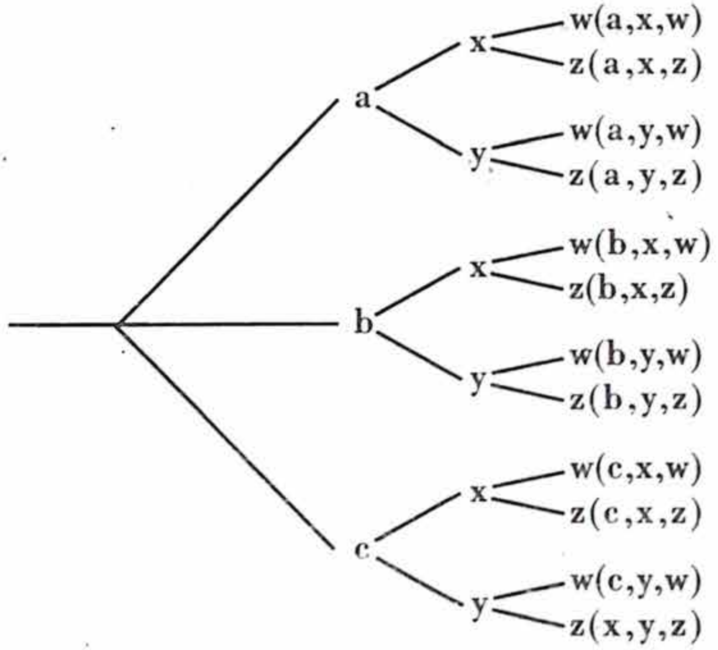
Es un método con el cual se puede encontrar el producto cartesiano de dos conjuntos o más.

Ejercicio

EJEMPLO

Si $A = \{a, b, c\}$; $B = \{x, y\}$; $C = \{w, z\}$

Hallar A x B x C usando el diagrama en árbol



$A \times B \times C = \{(a,x,w)$, (a,x,z) , (a,y,w) , (a,y,z) ,
(b,x,w) , (b,x,z) , (b,y,w) , (b,y,z) ,
(c,x,w) , (c,x,z) , (z,y,w), $(c,y,z)\}$

3.6.- Relaciones

Una relación R consiste en lo siguiente:

1.- Un conjunto A
2.- Un conjunto B
3.- Un enunciado formal $P(x,y)$, de manera que $P(a,b)$ es verdadero o falso para todo par ordenado (a,b) que pertenece a $A \times B$.

EJEMPLO

$$P(x,y) = 2x + y = 5$$

$$A = \{1,2,3,4\} \quad ; \quad B = \{2,3,5,7\}$$

$$A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,5), (1,7), (2,2), (2,3), (2,5), (2,7), (3,2), (3,3), (3,5), (3,7), (4,2), (4,3), (4,5), (4,7)\}$$

$P(1,5) = 2(1) + 5 = 5$ $\quad$ $P(1,3) = 2(1) + 3 = 5$

$7 \neq 5 = F$ $\quad$ $5 = 5 = V$

Si $P(a,b)$ es verdadero se escribe $a\,R\,b$ (a relacionado con b). Si $P(a,b)$ es falso se escribe $a \not{R}\, b$ (a no está relacionado con b).

Una relación binaria R de un conjunto A a un conjunto B, asigna a cada par ordenado $(a,b) \in A \times B$ exactamente uno de los enunciados siguientes:

1.- $a\ R\ b$: a está relacionado con b.
2.- $a \not{R}\ b$: a no está relacionado con b.

3.6.1.- Relaciones Como Conjunto de Pares Ordenados

Ejercicios

EJEMPLOS

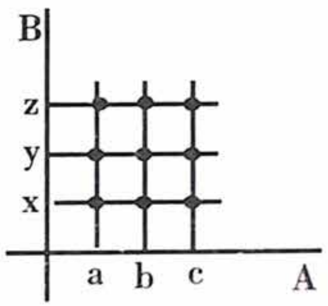
Sean: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{x, y, z\}$ y R definida por:

$R = \{(a, x), (a, y), (b, y), (b, z), (c, x), (c, z)\}$

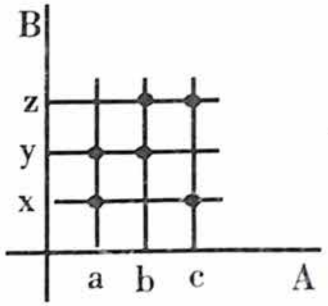
1.- Hallar A x B

$A \times B = \{(a,x), (a,y), (a,z), (b,x), (b,y), (b,z), (c,x), (c,y), (c,z)\}$

2.- Diagrama cartesiano de A x B



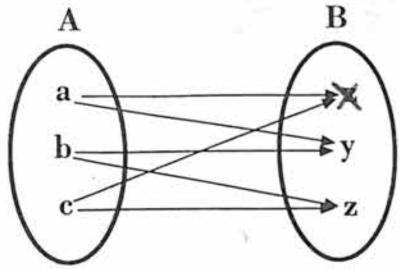
3.- Diagrama cartesiano de R



Ejercicios

EJEMPLOS

4.- Diagrama de flechas de R



Si un conjunto A tiene m elementos y un conjunto B tiene n elementos, entonces hay 2^{mn} relaciones distintas entre A y B, ya que $A \times B$ tiene mn elementos, por lo tanto tendrá 2^{mn} subconjuntos diferentes.

3.6.2.- Relaciones Recíprocas (Inversas)

Sea R una relación entre los conjuntos A y B. La inversa que se denota R^{-1} entre B y A es aquella cuyos pares ordenados de R han sufrido alteración en el orden.

EJEMPLO

$$R^{-1} = \{(b,a)/(a,b) \in R\}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- $R = \{(x,3), (y,2), (2,4)\}$
$R^{-1} = \{(3,x), (2,y), (4,2)$

2.- Sea $A = \{x,y,z\}$ y $B = \{1,2\}$

$R = \{(x,2), (y,1), (y,2), (z,2)\}$
$R^{-1} = \{(2,x), (1,y), (2,y), (2,z)\}$

3.6.3.- Relaciones Reflexivas

Una relación R en un conjunto A es reflexiva si para todo a que pertenece a A, entonces $(a,a) \in R$, es decir, $a\,R\,a$.

Ejercicios

EJEMPLOS

I.- Determine si las siguientes relaciones son reflexivas:

$$A = \{x,y,z\}$$

1) $R = \{(x,y),(x,z),(x,x),(z,z),(y,z),(y,y)\}$

Es reflexiva porque cada elemento está relacionado consigo mismo.

Ejercicios

EJEMPLOS

2) $R = \{(x,x),(x,z),(y,z),(z,z),(z,y)\}$

No es reflexiva porque $y \in A$ y $(y,y) \notin R$.

II.- Sea R una relación definida por "es > que". ¿Es reflexiva? Explique el por qué.

No es reflexiva porque nada es mayor que sí mismo.

3.6.4.- Relaciones Simétricas

Sea R una relación en un conjunto A, se dice que R es simétrica si $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$.

EJEMPLOS

1.- Sea $A = \{x,y,z\}$ y R definida por $R = \{(x,y),(z,y),(y,x),(x,z)\}$ ¿Es simétrica? Explica.

No, porque $(z,y) \in R$ y $(y,z) \notin R$.

2.- Sea $A = \{a,b,c,d\}$
$R = \{(a,c),(d,b),(b,d),(b,c),(c,a)\}$ ¿Es simétrica? Explique.

No porque $(b,c) \in R$ y $(c,b) \notin R$

3.6.5.- Relaciones Antisimétricas

Una relación R es antisimétrica si $(a,b) \in R$ y $(b,a) \notin R$.

Ejercicio

EJEMPLO

Determine si la relación R en A es antisimétrica y explique.

$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$R = \{(a,c), (d,b), (d,d), (b,d)\}$$

No es antisimétrica porque $(d,b) \in R$ y $(b,d) \notin R$.

3.6.6.- Relaciones Transitivas

Sea R una relación en un conjunto A, se dice que R es transitiva si $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$, entonces $(a,c) \in R$.

Ejercicio

EJEMPLO

I.- Sean: $A = \{a, b, c\}$
$R = \{(a,b), (c,b), (b,a), (a,c)$

¿Es transitiva?

1.- $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \wedge (a,a) \notin R$ no
2.- $(c,b) \in R \wedge (b,a) \in R \wedge (c,a) \notin R$ no

Ejercicio

EJEMPLO

3.- $(a,c) \in R \wedge (c,b) \in R \wedge (a,b) \in R$ Aparenta que sí

4.- $(b,a) \in R \wedge (a,b) \in R \wedge (b,b) \notin R$ no

No es transitiva

II.- Determina si la relación R definida por "es semejante a" es relación transitiva. Explica.

Si es transitiva porque si un elemento es semejante a un 2do. y el 2do. es semejante a un 3ro., el 1ro. es semejante a el 3ro.

III.-Sea R una relación definida por "es menor que" ¿Es una relación transitiva? Explique.

Si es transitiva. Si una cosa es menor que una segunda y la segunda menor que una tercera, la primera es menor que la tercera.

3.6.7.- Relaciones de Equivalencias

Una relación R en un conjunto A es de equivalencia si:

1ro. Es reflexiva.
2da. Es simétrica.
3ra. Es transitiva.

EJEMPLO

Determina si la relación R definida por "es igual que" es una relación de equivalencia.

1ra. es reflexiva, todo elemento se relaciona consigo mismo.
2da. es simétrica.
3ra. es transitiva.

R es equivalencia.

3.7.- Dominio y Dominio de Imágenes de una Relación

Sea R una relación entre A y B. El dominio de la relación es el con junto de todos los primeros elementos de los pares ordenados que pertenecen a R.

El Dominio de Imagen (DI) de una relación es el conjunto de todos los segundos elementos que aparecen en los pares ordenados.

EJEMPLO

Si $A = \{x, y, z\}$; $B = \{a, b, c\}$ y

$$R = \{(x,a),(x,c),(y,b),(z,b),(z,c)\}$$

$$DR = \{x, y, z\} \quad ; \quad Di = \{a, b, c\}$$

Para hallar el dominio de una relación se despeja y en función de x.

Para hallar el dominio de imagen de una relación se despeja x en función de y.

Si las variables x ó y aparecen en el denominador de una fracción, se iguala este denominador a cero, y se resuelve esta ecuación. Las raíces de esta ecuación son los valores que no pueden tomar las variables.

Si las variables aparecen dentro de un radical de índice par, se hace la cantidad subradical igual o mayor que cero, y el conjunto solución de esta inecuación son los valores que pueden tomar las variables.

Para hallar la inversa de una relación se despeja x en función de y, y luego se intercambia y por x y x por y.

Ejercicios

EJEMPLOS

I.- Hallar Dr y DI

1.- $y = \dfrac{3x}{1-2x}$

$$\begin{aligned} 1-2x &= 0 \\ -2x &= -1 \\ x &= -1/-2 \\ x &= 1/2 \end{aligned}$$

$D = \{x/x \neq 1/2\}$

$$\begin{aligned} y(1-2x) &= 3x \\ y-2xy &= 3x \\ -2xy-3x &= -y \\ x(-2y-3) &= -y \end{aligned}$$

$$x = \frac{-y}{-2y-3}$$

$$\begin{aligned} -2y-3 &= 0 \\ -2y &= 3 \\ y &= 3/-2 \end{aligned}$$

$DI = \{y/y \neq -3/2\}$

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- $xy+3x=-2y+4$

$xy+2y=4-3x$

$y(x+2)=4-3x$

$$y=\frac{4-3x}{x+2}$$

$x+2=0$

$x=-2$

$D=\{x/x\neq -2\}$

$xy+3x=-2y+4$

$x(y+3)=-2y+4$

$$x=\frac{-2y+4}{y+3}$$

$y+3=0$

$y=-3$

$DI=\{y/y\neq -3\}$

II.- Sea R una relación definida en los números reales mediante el siguiente enunciado formal: $x^2+y^2=9$. Hallar Dr y DI.

$y^2=9-x^2$

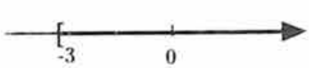
$y=\pm\sqrt{9-x^2}$

$9-x^2\geq 0$

$(3+x)(3-x)\geq 0$

$3+x\geq 0$

$x\geq -3$



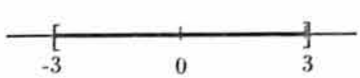
$3-x\geq 0$

$-x\geq -3$

$$\frac{-x}{-1}\leq\frac{-3}{-1}$$

$x\leq 3$

Intersección:

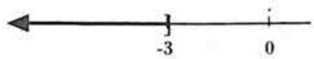


Ejercicios

EJEMPLOS

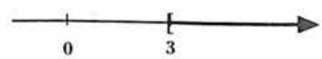
$$3+x \le 0 \qquad\qquad 3 - x \le 0$$

$$x \le -3 \qquad\qquad -x \le -3$$

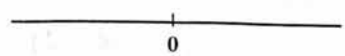


$$\frac{-x}{-1} \ge \frac{-3}{-1}$$

$$x \ge 3$$

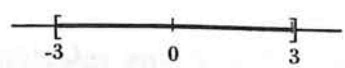


Intersección:



$\emptyset$

Unión de Intersecciones:



$$D = \{ x / -3 \le x \le 3 \}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$\cancel{y}^2 = 9 - y^2$$

$$x = \pm\sqrt{9 - y^2}$$

$$9 - y^2 \ge 0$$

$$(3+y)(3-y) \ge 0 \qquad\qquad 3 - y \ge 0$$

$$3 + y \ge 0 \qquad\qquad -y \ge -3$$

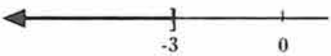
$$y \ge -3 \qquad\qquad y \le 3$$

Intersección:

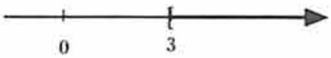
Ejercicios

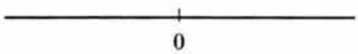
EJEMPLOS

$$3+y \leq 0$$
$$y \leq -3$$

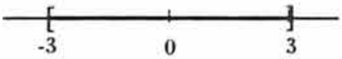


$$3 - y \geq 0$$
$$-y \geq -3$$
$$\frac{-y}{-1} \geq \frac{-3}{-1}$$
$$y \geq 3$$



Intersección: 

$\emptyset$

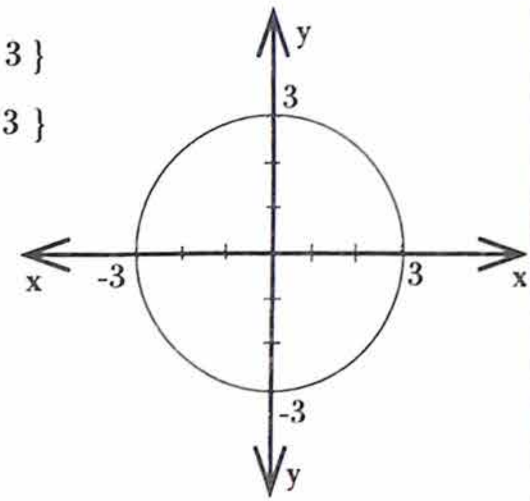
Unión de Intersecciones: 

$$D = \{\, y / -3 \leq y \leq 3 \,\}$$

$D = \{\, x / -3 \leq x \leq 3 \,\}$

$DI = \{\, y / -3 \leq y \leq 3 \,\}$

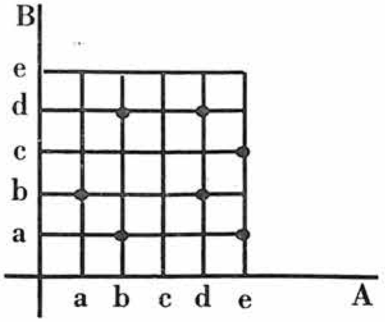
$y \pm \sqrt{9 - x^2}$



Ejercicios

EJEMPLOS

III.- Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y sea R una relación definida por:



1.- **Hallar A x A**

$$A \times A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (b,e), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (c,e), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d), (d,e), (e,a), (e,b), (e,c), (e,d), (e,e)\}$$

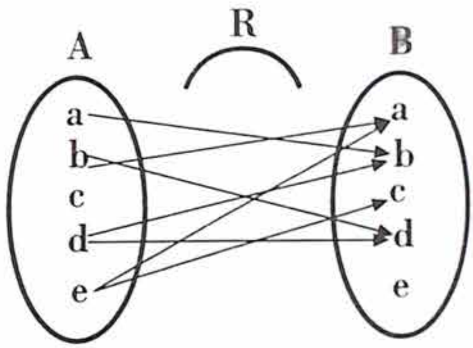
2.- **Escribir R como un conjunto de pares ordenados**

$$R = \{(a,b), (b,a), (b,d), (d,b), (e,a), (e,c), (d,d)\}$$

Ejercicios

Ejemplos

3.- Diagrama de flechas de R.



4.- **¿Cuál es la imagen de a, b, c, d, e?**

La imagen de a = {b}
La imagen de b = {a,d}
La imagen de c = { }
La imagen de d = {b,d}
La imagen de e = {a,c}

5.- **¿Qué es R de A x A?**

$R \subset A \times A$

6.- Hallar R(a), R(b), R(c), R(d), R(e)

R(a) = {b}
R(b) = {a,d}
R(c) = {}
R(d) = {b,d}
R(e) = {a,c}

Ejercicios

EJEMPLOS

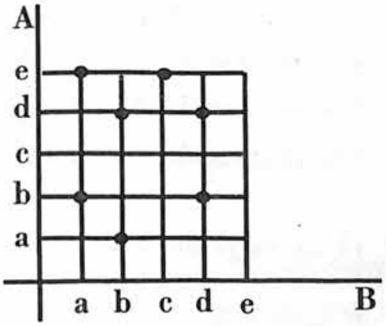
7.- Dr y DI

Dr = {a , b , d , e } ; Di = {a , b , c , d }

8.- Recíproca de R

R^{-1}={(b,a) , (a,b) , (d,b) , (b,d) , (d,d) , (a,e) , (c,e)}

9.- Representa R^{-1} en un diagrama cartesiano ordenado



10.- Hallar R^{-1} (a), R^{-1} (b), R^{-1} (c), R^{-1} (d), R^{-1} (e)

R^{-1} (a) = {b,e}
R^{-1} (b) = {a,d}
R^{-1} (c) = {e}
R^{-1} (d) = {b,d}
R^{-1} (e) = {}

Ejercicio # 1. Unidad No. 3

I.- Sea A = {3,4,5} y B = {6,4,5,9} y R definida por: "x divide a y".

1.- Escribir R como un conjunto de pares ordenados.

2.- Hallar A x B.

3.- Diagrama cartesiano de A x B

4.- Diagrama cartesiano de R.

5.- Diagrama de flechas de R.

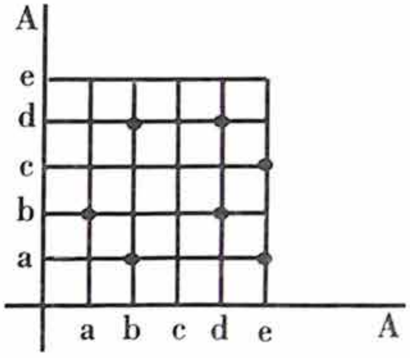
6.- Hallar la imagen de 3, de 4 y de 5 en R.

7.- Hallar el dominio de imagen de la relación.

8.- Hallar R(3), R(4), R(5).

9.- Hallar R^{-1} de B en A.

II.- Sea A = {a,b,c,d,e} y sea R una relación definida por:



1.- Hallar A x A.

2.- Escribir R como un conjunto de pares ordenados.

3.- Diagrama de flechas de R.

4.- ¿Cuál es la imagen de a, b, c, d, e?

5.- ¿Qué es R de A x A?

6.- Hallar: R(a), R(b), R(c), R(d), R(e).

7.- Hallar: Dr DI

8.- Recíproca de R.

9.- Representar R^{-1} en un diagrama cartesiano.

10.- Hallar: R^{-1} (a), R^{-1} (b), R^{-1} (c), R^{-1} (d), R^{-1} (e).

III.- ¿Para qué valores de x no están definidas éstas expresiones?

1.- $\frac{2}{x}$

2.- $\frac{x}{x-1}$

3.- $\frac{x^2}{x^2+3x+2}$

4.- $\dfrac{4x}{x^2 - 5x}$

5.- $\dfrac{4}{x^2 - 3x}$

6.- $\sqrt{2x}$

7.- $\sqrt{x^2 + 6x + 5}$

8.- $\sqrt{\dfrac{4}{x}}$

9.- $\sqrt{\dfrac{3x}{x-4}}$

10.- $\sqrt{\dfrac{5}{x+1}}$

IV.- Despejar x e y en:

1.- $xy = -3x + 2$

2.- $x = \dfrac{1}{2y - 2}$

3.- $4x = y - 2$

4.- $x^2 + y^2 = 25$

5.- $y\,(x + 2) = 27$

6.- $4x + y = -2y + 5$

V.-Hallar Dr y Di de:

1.- $y = 3x - 1$

2.- $y = \dfrac{4}{x+2}$

3.- $xy = -5$

4.- $x^2 + y^2 = 4$

5.- $x = \dfrac{3}{y+1}$

VI.- Hallar la gráfica de:

1.- $y = -x$

2.- $y = -\,/x/$

3.- $y = \begin{cases} -1\,,\ \text{si } x \geq 0 \\ \ \ 2\,,\ \text{si } x < 0 \end{cases}$

4.- $y = \begin{cases} 4\,,\ \text{si} \quad -2 < x \leq 4 \\ 0\,,\ \text{si} \quad 4 < x \leq 7 \\ -3\,,\text{si} \quad 7 < x \leq 10 \end{cases}$

VII.- Si $A = \{a,b,c\}$, $B = \{x,y,z\}$. Hallar $A \times B$

VIII.- Usando diagrama de árbol. Hallar: $A \times B \times C$, si:

$A = \{1,2,3\}$ $\quad B = \{m,n\}$ $\quad C = \{p,q\}$

IX.- Dado $R(x) = 3X^2 - 2x + 6$. Hallar:

1.- $\dfrac{R(2) - 3R(1)}{2R(3) + 2R(-1)}$

2.- $R(a + b) - R(a)$

3.- $R(x + n) - R(x)$

X.- Hacer la gráfica en el plano cartesiano de:

1.- $y = -2$

2.- $y = 4$

3.- $x = -1$

4.- $x = 0$

XI.- ¿Cuál es Dr y Di de:

1.- $y = 5$

2.- $x = -3$

3.8.- Funciones

Si a cada elemento de un conjunto *A* se le hace corresponder un elemento único de un conjunto ***B***, esta correspondencia se le llama función de *A* en ***B*** y se escribe. f: A → B que se lee *f es una función de A en B*.

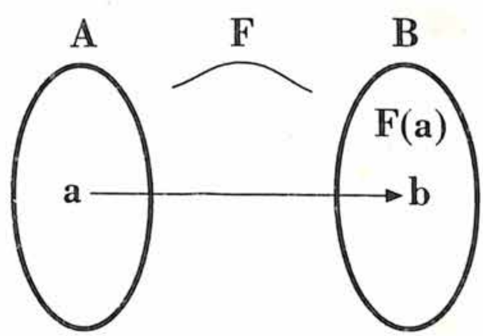
A = Conjunto de salida

B = Conjunto de llegada

El dominio de la función ***f*** es ***A*** y el condominio es ***B***.

El elemento b que pertenece a ***B***, que está relacionado con un elemento a ***Á*** se le llama imagen de ***a***. f(a) = b.

EJEMPLO

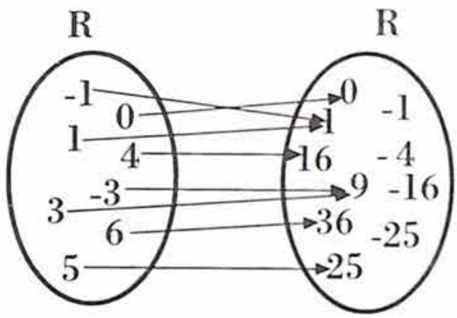


Ejercicio

EJEMPLO

Sea f el hacer corresponder a cada número real su cuadrado. Es decir $f(x) = x^2$. Hallar:

1.- $f(2) = 4$
2.- $f(-2) = 4$
3.- $f(3) = 9$
4.- $f(-3) = 9$
5.- $f(5) = 25$



$Df = R$

$DI = R + \cup \{0\}$

La diferencia entre una relación y una función es que en la función, para un elemento del conjunto de salida solo puede haber una imagen, es decir, que las primeras componentes de los pares ordenados no se repiten.

Ejercicios

EJEMPLOS

I.-Sean $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{x,y,z\}$ y $f: A \rightarrow B$ definida por : $f(1) = y$, $f(2) = z$, $f(3) = z$ y $f(4) = y$.

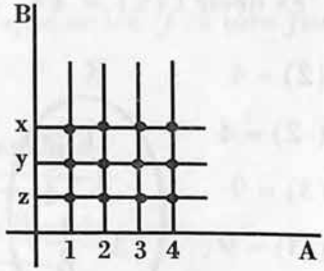
1.- Escribir f como un conjunto de pares ordenados.

$f = \{(1,y),(2,z),(3,Z),(4,y)\}$

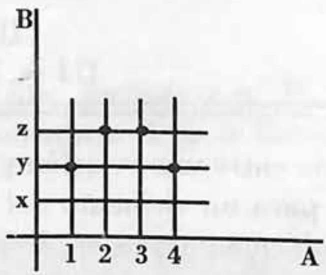
Ejercicio

EJEMPLO

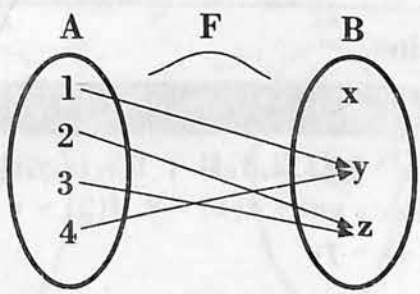
2.- Diagrama cartesiano de A x B.



3.- Diagrama cartesiano de f



4.- Diagrama de flechas de f



5.- ¿Cuál es la imagen de 1,2,3,4 ?

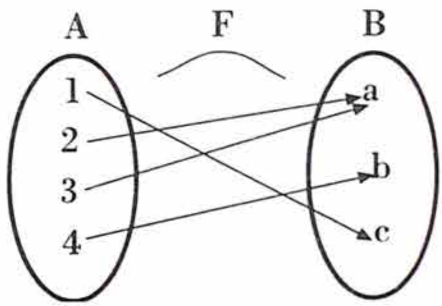
De 1 es y **De 3 es z**

De 2 es z **De 4 es y**

Ejercicios

EJEMPLOS

II.- Sean A = {1,2,3,4} ; B = {a,b,c} y f: A → B definida por el siguiente diagrama:



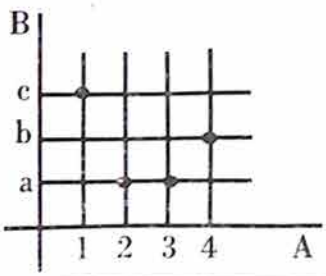
1.- Hallar A x B

A x B = {(1,a) , (1,b) , (1,c) , (2,a) , (2,b) , (2,c) , (3,a) , (3,b) , (3,c) , (4,a) , (4,b) , (4,c)}

2.- Escribir f como un conjunto de pares ordenados

f= {(1,c) , (2,a) , (3,a) , (4,b)}

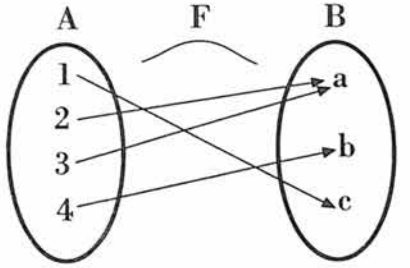
3.- Diagrama cartesiano de f



Ejercicios

EJEMPLOS

4.- Diagrama de flechas de f



5.- Hallar f(1) , f(2) , f(3) , f(4)

f(1) = c , f(2) = a , f(3) = a , f(4) = b

6.- ¿Cuál es la imagen de 1 , 2 , 3 , 4?

La imagen de 1 es c.

La imagen de 2 es a.

La imagen de 3 es a.

La imagen de 4 es b.

3.8.1.- Funciones Iguales

Dos funciones f y h son iguales si están definidas en el mismo dominio y si $f(a)$ es igual a $h(a)$, para todo a que pertenece al dominio de ambas. Estas funciones son iguales y se representan $f = h$.

3.8.2.- Dominio de Imágenes de una Función

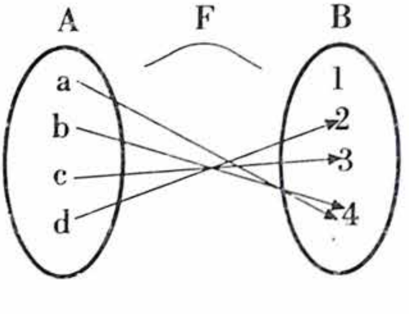
Sea f una funcion de A en B, $f: A \rightarrow B$. El conjunto de todos los elementos que son imágenes de por lo menos un elemento de A, se le llama dominio de imágenes.

3.8.3.- Función Inyectiva (Uno a Uno)

Sea $f: A \rightarrow B$. Si elementos distintos del conjunto de llegada corresponden a elementos distintos del conjunto salida, es decir, si elementos distintos de A tienen imágenes distintas, entonces se dice que f es inyectiva.

EJEMPLOS

1.- Sea f una función definida por:



¿Es inyectiva? Explique.

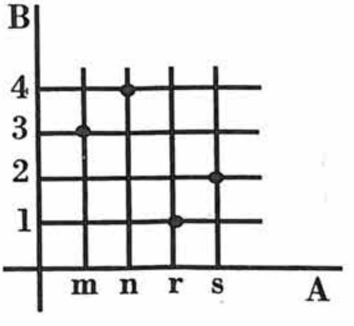
No es inyectiva porque f (a) = 4 y f (b) = 4

EJEMPLOS

2.- Sea f: R → R definida por $f(x) = x^2$. ¿Es inyectiva? Explique.

No, porque f(5) = 25 y f(–5) = 25. Elementos distintos del dominio tienen imágenes igual a 25.

3.- Sea f: A → B definida por:



¿Es inyectiva?

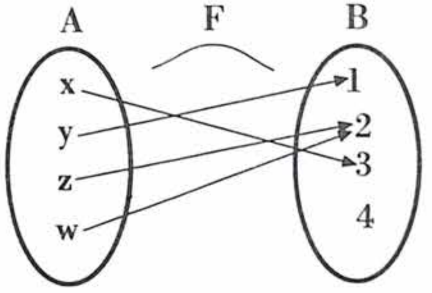
Si porque elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas.

3.8.4.- Funciones Sobreyectivas

Sea *f*: *A* → *B*, se dice que *f* es sobreyectiva si todo elemento del conjunto de llegada es imagen de por lo menos un elemento del conjunto de salida.

EJEMPLOS

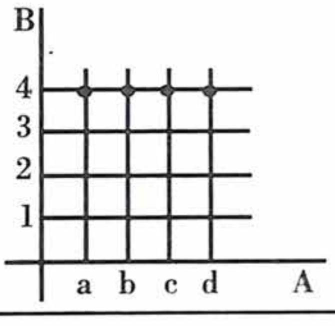
1.- Sea f: A → B definida por:



¿Es sobreyectiva? Explique.

No es sobreyectiva porque 4 no es imagen de ningún elemento de A.

2.- Sea f: A → B definida por:



¿Es sobreyectiva? Explique.

No porque 1 , 2 , 3 no son imágenes.

3.8.5.- Función Biyectiva

Es aquella que es inyectiva y sobreyectiva.

3.8.6.- Función Idéntica

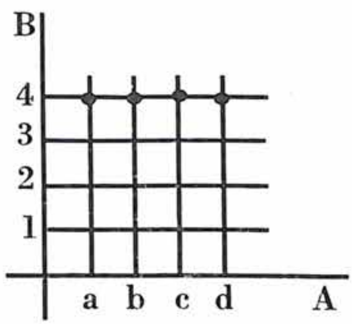
Sea $f: A \rightarrow A$, definida por $f(x) = x$, esta función hace corresponder a cada elemento del conjunto A el mismo elemento y se le llama función idéntica.

3.8.7.- Función Constante

Sea $f: A \rightarrow B$. Se dice que f es constante, si elementos distintos del conjunto de salida tienen la misma imagen.

Ejercicio:

Sea f: A → B definida por:



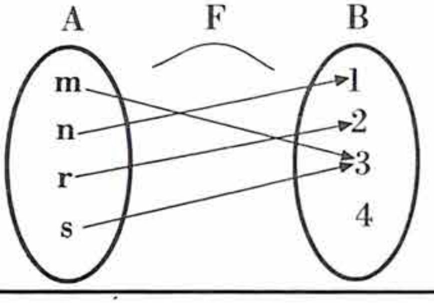
1.- **Hallar A x B.**
2.- **Escribir f como un conjunto de pares ordenados.**
3.- **Diagrama de flechas de f.**
4.- **Df y DI.**
5.- **Es constante? Explique.**
6.- **Es inyectiva? Explique.**
7.- **Es sobreyectiva? Explique.**
8.- **Es biyectiva? Explique.**
9.- **¿Cuál es la imagen de a, b, c, d?**
10.- **Hallar f(a) , f(b) , f(c) , f(d).**

3.8.8.- Imagen Recíproca de una Función

Si $f: A \rightarrow B$ y $b \in B$, entonces la imagen recíproca de b, que la escribimos $f^{-1}(b)$, son todos los elementos de A que tienen a b como imagen.

EJEMPLO

Sea f: A → B definida por:



$f^{-1}(1) = \{n\}$

$f^{-1}(2) = \{r\}$

$f^{-1}(3) = \{s, m\}$

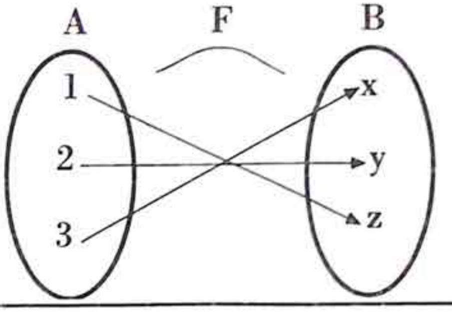
$f^{-1}(4) = \emptyset$

3.8.9.- Funcion Recíproca

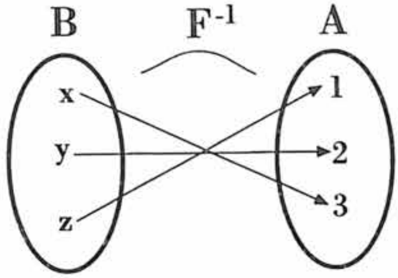
Para que una función $f: A \rightarrow B$, tenga función recíproca $f^{-1}: B \rightarrow A$ f debe ser biyectiva.

EJEMPLO

Sea f una función de A en B, definida por el siguiente diagrama:



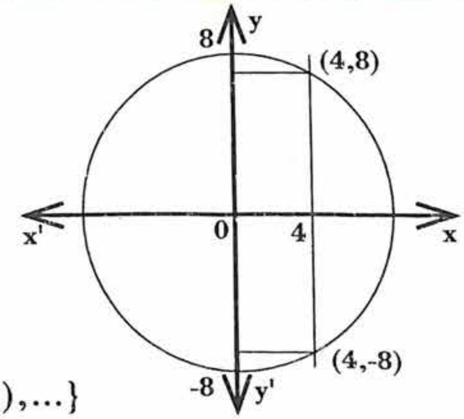
f es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto tiene $f^{-1}: B \rightarrow A$. Su diagrama es el siguiente:



Para determinar si la gráfica de una relación representa una función, se traza una recta vertical (perpendicular) al eje de las x, si esta perpendicular corta la gráfica en más de un punto, no es función, ya que habría una abscisa con más de una ordenada, es decir, un elemento del conjunto de salida tendría más de una imagen.

EJEMPLOS

1.-

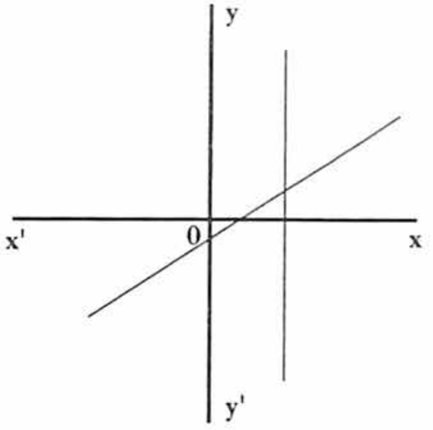


R= {(4,8),(4,–8),...}

No es función, porque si trazamos una recta perpendicular al eje de las x corta la gráfica en más de un punto.

EJEMPLOS

2.-



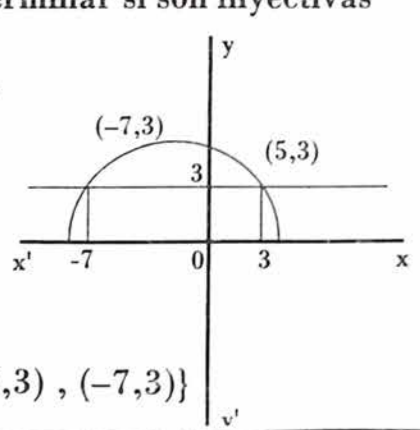
Si es función, porque si se traza una recta perpendicular al eje de las x, solo la corta en un punto.

Para determinar si la gráfica de una función es inyectiva, se traza una recta perpendicular al eje de las y, si esta perpendicular corta la gráfica en más de un punto, no es inyectiva, ya que habrían dos abscisas con la misma ordenada, es decir, dos elementos distintos del conjunto de salida tendrían la misma imagen.

EJEMPLOS

Determinar si son inyectivas

1.-

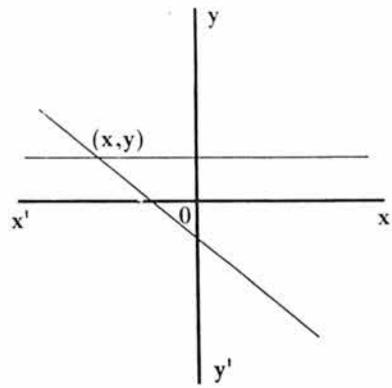


No es inyectiva puesto que la recta paralela al eje de las x, corta la gráfica en dos puntos.

f: {(5,3) , (–7,3)}

EJEMPLOS

2.-



Es inyectiva porque si se traza una perpendicular al eje de las y corta la gráfica en un solo punto.

Ejercicios

EJEMPLOS

Dado $f(x) = x^2 - x + 4$ Hallar.

1.- $f(a) = a^2 - a + 4$

2.- $f(-b) = (-b)^2 - (-b) + 4$
$= b^2 + b + 4$

3.- $f(3) = 3^2 - 3 + 4$
$= 10$

4.- $f(a + b) = (a + b)^2 - (a + b) + 4$
$= a^2 + 2ab + b^2 - a - b + 4$

Ejercicios

EJEMPLOS

5.- $$\frac{f(0)+2f(1)}{f(-2)-2f(3)} = \frac{4+8}{10-20} = \frac{12}{-10} = -\frac{6}{5}$$

$f(0) = 0^2 - 0 + 4 = \underline{4}$

$f(1) = 1^2 - 1 + 4 = \underline{4}$

$2f(1) = 2 \times 4 = \underline{8}$

$f(-2) = (-2)^2 - (-2) + 4$

$= 4 + 2 + 4 = \underline{10}$

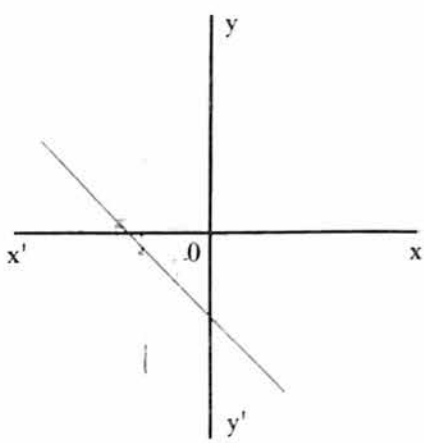
$f(3) = 3^2 - 3 + 4 = \underline{10}$

$2f(3) = 2 \times 10 = \underline{20}$

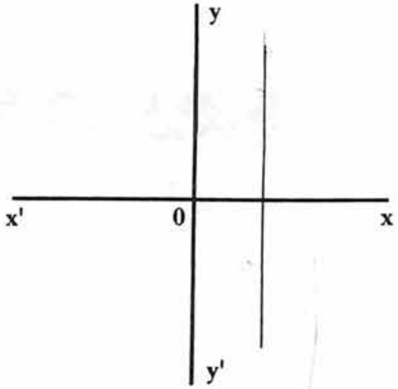
Ejercicio # 2. Unidad No. 3

I.-¿Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones? Explique.

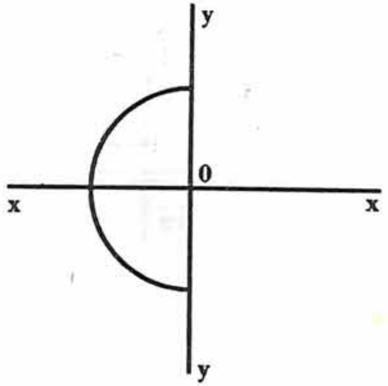
1.-



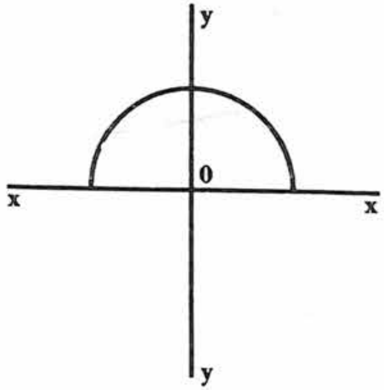
2.-



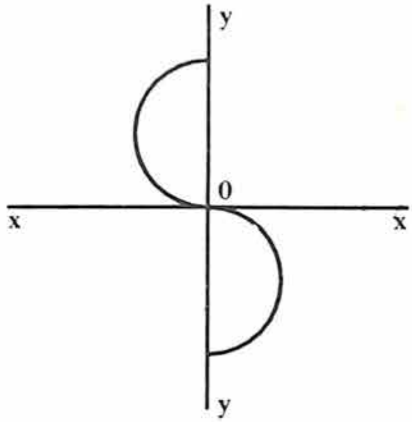
3.-



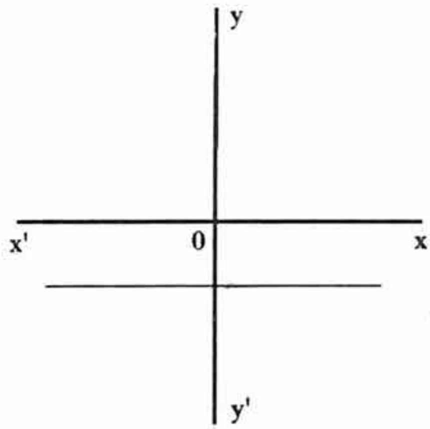
4.-



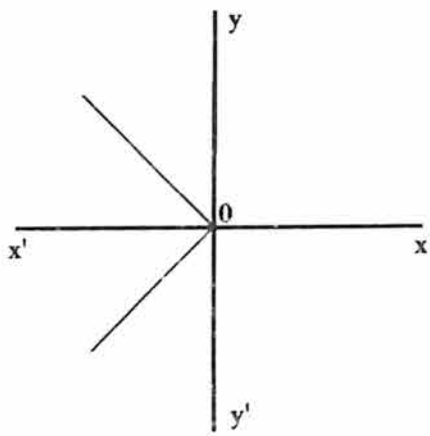
5.-



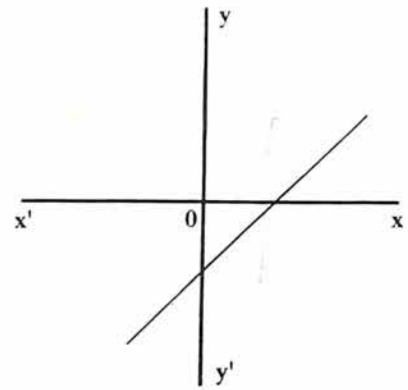
6.-



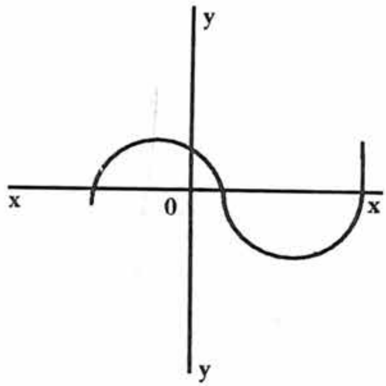
7.-



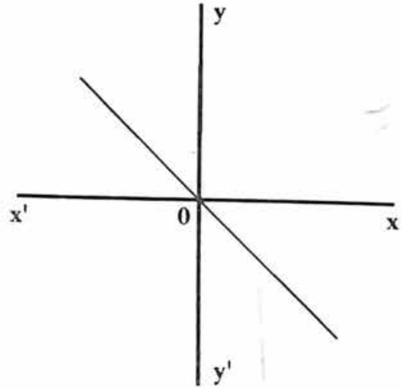
8.-



9.-

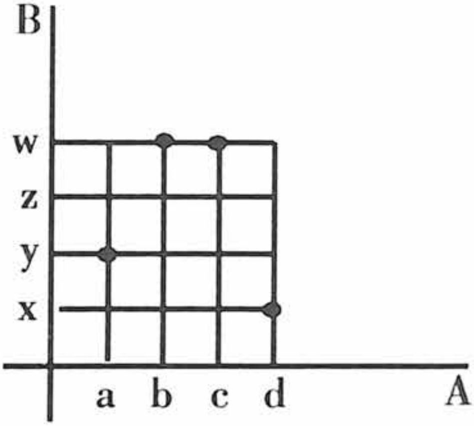


10.-

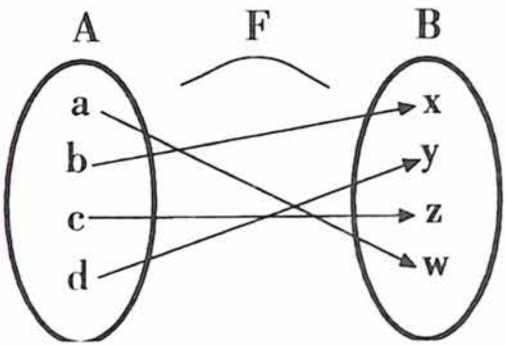


II.- Determinar cuáles de las siguientes gráficas representa una función biyectiva.

1.-



2.-



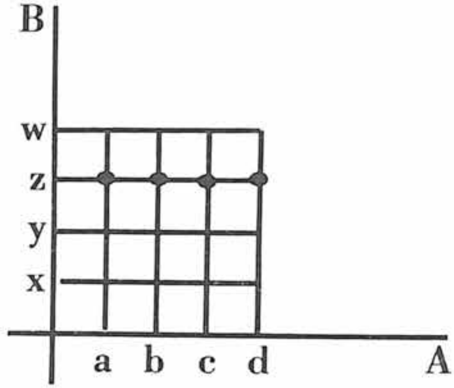
3.- $R(a) = x$

$R(b) = y$

$R(c) = y$

$R(d) = w$

4.-



III.- Si $A = \{m, n, r, s\}$ y $B = \{x, y, z, w\}$

1.- Hacer diagrama cartesiano y hacer diagrama de flechas en que se represente una función constante.

IV.- Si $A = \{3, 4, 5, 6\}$, escribir una relación en A que sea:

1.- Reflexiva

2.- Simétrica

3.- Antisimétrica

4.- Transitiva

5.- De equivalencia

V.-¿Qué gráfica representa las siguientes ecuaciones en el plano cartesiano?

1.- $y = -3$

2.- $x = 0$

3.- $y = 4$

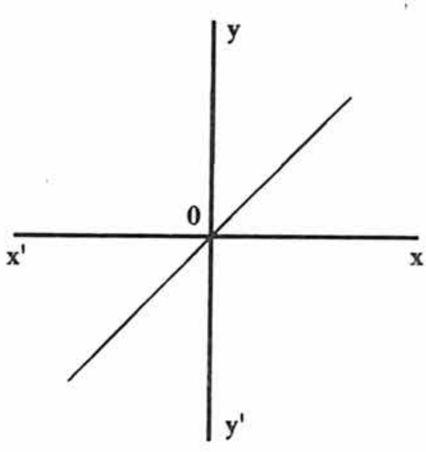
4.- $x = -2$

5.- $y = 0$

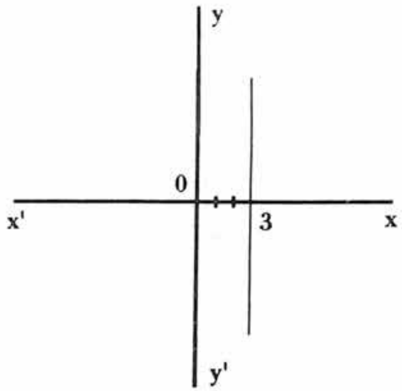
6.- $x = 5$

VI.- ¿Qué ecuaciones son representadas por las siguientes gráficas?

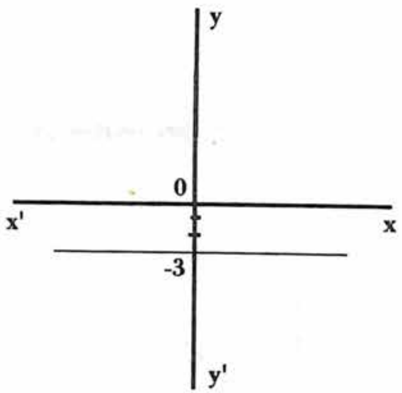
1.-



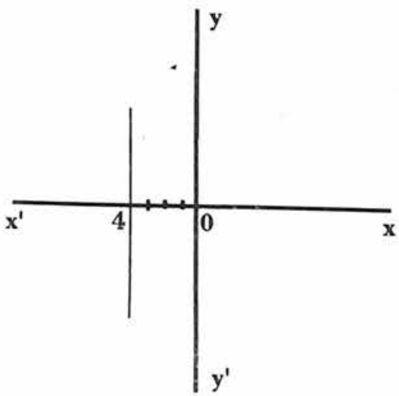
2.-



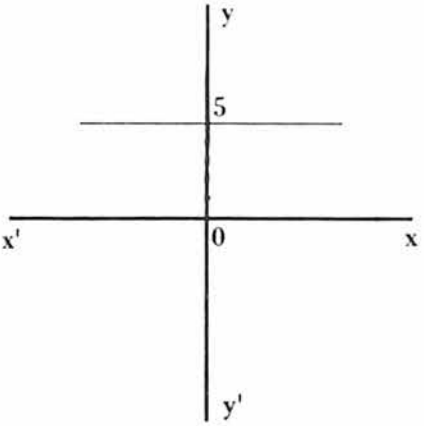
3.-



4.-



5.-



VII.- Hallar x e y, si:

1.- $(x, 3 + y) = (4,5)$

2.- $(x + 3, y - 2) = (5,2)$

3.- $(x, y + 1) = (4,3)$

4.- $(3x - 1.\ 2y - 4) = (5,0)$

5.- $(x + 2, y + 3) = (y + 1, 2x + 2)$

6.- $(2x, 3y + 1) = (y - 1, 8x)$

VIII.- Si $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$. Escribir:

1.- Una función constante de A en B.

2.- Una función de identidad de A en A.

IX.- 1.- Para que una función tenga recíproca, ¿cómo debe ser ésta?

2.- Hallar la recíproca de:

a.- $y = \dfrac{2x}{3x-1}$

b.- $3x + 4y = -6$

X.- 1.- ¿Qué diferencia hay entre una función y una relación?

2.- Si $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$

a.- Escribir una relación que no sea función.

b.- Escribir una función como conjunto de pares ordenados.

c.- Diagrama cartesiano de la función .

d.- Diagrama de flechas de la función.

e.- Explique por qué la relación no es función.

XI.- Sea $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$
$\mathbb{R} = \{(a,1)\ ,\ (b,4)\ ,\ (c,1)\ ,\ (d,4)\}$

1.- Hallar $A \times B$.

2.- Diagrama cartesiano de A x B

3.- Diagrama cartesiano de R.

4.- ¿Es R una función? Explique.

5.- Diagrama de flechas de R.

6.- ¿Qué es f de A x B?

7.- Hallar Df y Di.

8.- Hallar f^{-1}.

9.- ¿Cuál es la imagen de a, b, c, d?

10.- ¿A qué es igual f(a), f(b), f(c), f(d)?

11.- ¿A qué es igual $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(b)$, $f^{-1}(c)$, $f^{-1}(d)$?

12.- Escribir $f^{-1}: B \to A$ como un conjunto de pares ordenados.

13.- Diagrama cartesiano de $f^{-1}: B \to A$.

Ejercicios de Repaso
UNIDAD No. 3

I.-Para qué valores de x no están definidas las siguientes expresiones.

1.- $\dfrac{4}{x}$

2.- $\dfrac{3x-1}{x-2}$

3.- $\dfrac{2x}{x^2-x}$

4.- $\dfrac{5}{x^2-1}$

5.- $\dfrac{1}{x^2-x-6}$

6.- $\sqrt{x+3}$

7.- $\sqrt{x^2-1}$

8.- $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

9.- $\sqrt{\dfrac{4}{x-2}}$

10.- $\sqrt{x^2+x-6}$

II.- Para que valores de x están definidas las siguientes expresiones.

1.- $\dfrac{4}{2x-2}$

2.- $\dfrac{3x}{x^2-36}$

3.- $\sqrt{x^2+5x}$

4.- $\sqrt{\dfrac{2}{x-3}}$

5.- $\sqrt{\dfrac{1}{x^2-x-6}}$

III.- Despejar x e y en:

1.- $xy = x - 3$

2.- $x(y + 1) = 3$

3.- $4x = \dfrac{-2}{-y+1}$

4.- $x^2 + y^2 = 9$

5.- $5x - y = 4xy + 1$

6.- $y(x - 2) = 8$

IV.- Hallar el Dr y Di de:

1.- $x^2 + y^2 = 64$

2.- $4xy = \dfrac{2x}{5}$

3.- $x = \dfrac{y}{y+2}$

4.- $x^2 + y^2 = 1$

5.- $x = -3$

6.- $y = 5$

V.-Hacer la gráfica en el plano cartesiano de:

1.- $y = -x$

2.- $y = /x/$

3.- $y = -/x/$

4.- $x = -3$

5.- $x = -1$

6.- $y = \begin{cases} -3, & \text{si } x \geq 0 \\ 4, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

7.- $\begin{cases} -1, & \text{si} \quad -3 \leq x < 1 \\ 0, & \text{si} \quad 1 \leq x < 5 \\ 2, & \text{si} \quad 5 \leq x < 8 \end{cases}$

VI.- Dar el Dr y DI de las relaciones del tema V.

VII.- Si $f(x) = -3x^2 - 6x + 4$, hallar:

1.- $f(a)$

2.- $f(b)$

3.- $f(a + b)$

4.- $f(x + h)$

5.- $f(x + h) - f(x)$

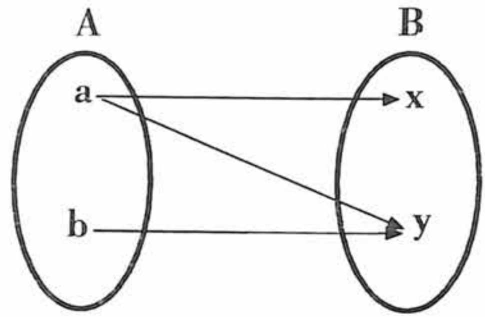
6.- $\dfrac{2f(3) - f(0)}{4f(1) + 2f(4)}$

7.- $f(x - 1)$

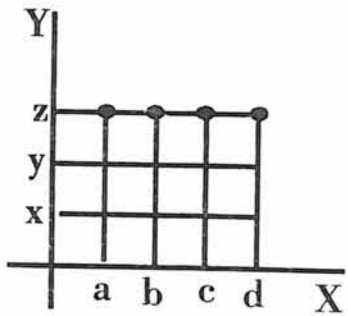
8.- $\dfrac{f(3) - 4f(1)}{2f(5) + f(0)}$

VIII.- Cuales de las siguientes graficas representa una función.

1.-



2.-



IX.- Si A = {x, y, z, w} ; B = {1, 2, 3, 4}

Representa gráficamente cinco (5) funciones de A en B.

X.- **Si $A = \{a,b,c,d\}$ escriba una relación en A sea:**

1.- Reflexiva
2.- Simétrica
3.- Antisimétrica
4.- Transitiva

UNIDAD No. 4

Notación Factorial

UNIDAD No. 4

Notación Factorial

4.1.- Notación Factorial

El producto de los enteros positivos de *1* a *n*, inclusive, se representa por *n!* o $\underline{\lfloor n}$ y se lee n factorial o factorial de n.

EJEMPLO

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots \times 1$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times (n-1)(n)$$

$$7! = 7 \times 6 \times 5!$$

$$9! = 9 \times 8!$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)!$$

Ejercicios

EJEMPLO

Calcular:

1.- $\dfrac{6!}{8!} = \dfrac{\cancel{6}!}{8 \times 7 \times \cancel{6}!} = \dfrac{1}{8 \times 7} = \dfrac{1}{56}$

2.- $\dfrac{9!}{7!} = \dfrac{9 \times 8 \times \cancel{7}!}{7!} = \dfrac{9 \times 8}{1} = 72$

3.- $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$

4.- $\dfrac{(n+1)!}{(n+2)!} = \dfrac{(n+1)!}{(n+2)(n+1)!} = \dfrac{1}{n+2}$

Ejercicios

Calcular:

1.- $7!$

2.- $5!$

3.- $6!$

4.- $\dfrac{8!}{7!}$

5.- $\dfrac{9!}{11!}$

6.- $\dfrac{4!}{8!}$

7.- $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

8.- $\dfrac{(n-3)!}{(n-1)!}$

9.- $\dfrac{(n+4)!}{(n+2)!}$

4.2.- Principio Fundamental del Conteo

Si un suceso puede ocurrir de p maneras diferentes, y siguiendo este suceso un segundo suceso puede ocurrir de q maneras diferentes, y siguiendo este suceso un tercer suceso puede ocurrir de r maneras diferentes, entonces el número de maneras que pueden ocurrir los sucesos es igual a $p \times q \times r$.

EJEMPLOS

1.- **Una placa de automóvil contiene dos letras seguidas de tres dígitos, con el primer dígito diferente de cero. ¿Cuántas placas diferentes pueden fabricarse?**

28 letras   10 dígitos = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9

$28 \times 28 \times 9 \times 10 \times 10 = 705{,}600$

2.- **Un club tiene 24 socios y desea elegir un presidente, un tesorero y un secretario. Ninguna persona puede ser elegida para dos cargos.**

a.- ¿De cuántas maneras lo puede elegir?

b.- ¿De cuántas maneras lo puede elegir si dos miembros determinados solamente son los que se pueden elegir para presidente, pero también para los demás cargos?

Ejemplos

c.- ¿De cuántas maneras si dos miembros determinados solamente pueden ser elegidos para presidente pero no para los demás cargos?

d.- ¿De cuántas maneras si dos miembros determinados no pueden ser elegidos para presidente pero si para los demás cargos?

e.- ¿De cuántas maneras si dos miembros determinados no pueden ser elegidos para presidente ni para los demás cargos?

Desarrollo

a.- 24 x 23 x 22 = 12,144 maneras diferentes

b.- 2 x 23 x 22 = 1,012 maneras diferentes

c.- 2 x 22 x 21 = 924 maneras diferentes

d.- 22 x 23 x 22 = 11,132 maneras diferentes

e.- 22 x 21 x 20 = 9,240 maneras diferentes

3.- Existen 6 carreteras entre las ciudades P y Q y 5 carreteras entre las ciudades Q y R. Hallar el número de formas diferentes en que una persona puede ir de P a R pasando por Q.

6 x 5 = 30 formas diferentes

EJEMPLOS

4.- Hallar el número de enteros diferentes de tres cifras que pueden formarse con los dígitos 1, 3, 5, 6 y 8.

a.- Sin repetición

$5 \times 4 \times 3 = 60$

b.- Con repetición

$5 \times 5 \times 5 = 125$

4.1.- ¿Cuántos que sean pares?

a.- Sin repetición

$3 \times 4 \times 2 = 24$

b) Con repetición

$5 \times 5 \times 2 = 50$

4.2.- ¿Cuántos que sean impares?

a) Sin repetición

$3 \times 4 \times 3 = 36$

EJEMPLOS

b) Con repetición

$5 \times 5 \times 3 = 75$

4.3.- ¿Cuántos que sean múltiplos de 5?

a.- Sin repetición

$3 \times 4 \times 1 = 12$

b.- Con repetición

$5 \times 5 \times 1 = 25$

4.4.- ¿Cuántos que sean mayores que 300?

a.- Sin repetición

$4 \times 4 \times 3 = 48$

b.- Con repetición

$4 \times 5 \times 5 = 100$

EJEMPLOS

4.5.- ¿Cuántos que sean menores de 500?

a.- Sin repetición

$2 \times 4 \times 3 = 24$

b.- Con repetición

$2 \times 5 \times 5 = 50$

4.3.- Permutaciones

Son los diferentes grupos que pueden formarse con *n* objetos tomados de *r* en *r* de manera que dos grupos se diferencien en el orden o en la naturaleza de sus elementos. $P(n,r)$; $r \leq n$

El número de permutaciones de *n* objetos diferentes tomados de r en r está dado por la siguiente fórmula.

FORMULA

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\ ;\ r \leq r$$

Por definición $0! = 1$

El número de permutaciones de *n* objetos entrando todos a la vez es:

EJEMPLO

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n,n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} - n!$$

$P\,(n,n) = n!$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Calcular

a.- $$P(8,6) = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 20{,}160$$

b.- $P(5,5) = 5! \;=\; 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \;=\; 120$

c.- $$P(4,1) = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4$$

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- ¿Cuántas permutaciones de 3 objetos x,y,z se pueden formar?

$P(3,3) = 3! \qquad 3 \times 2 \times 1 = 6$

3.- ¿Cuántas permutaciones con 5 objetos a,b,c, d,e se pueden formar tomándolos de 4 en 4?

$$P(5,4) = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 120$$

4.3.1.- Permutaciones con Repetición

A veces se desea encontrar el número de permutaciones de objetos, en que algunos son iguales entre sí, su fórmula es la siguiente.

El número de permutaciones de n objetos de los cuales p son iguales entre sí, q son iguales entre sí, r son iguales entre sí, está dado de la siguiente forma:

FORMULA

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de la palabra alabama?

n = 7

p = 4

$$\frac{n!}{p!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

2.- **¿ Cuántas señales diferentes, cada una que contenga 7 banderas colgadas en línea vertical, pueden formarse en un conjunto de 3 banderas idénticas blancas, 2 banderas idénticas negras y 2 banderas idénticas amarillas.**

$$\frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3}!}{\cancel{3}! \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 210$$

4.3.2.- Permutaciones Circulares

El número de permutaciones de *n* objetos alrededor de un círculo es *(n - 1)!*.

EJEMPLO

¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 muchachos alrededor de una mesa redonda ?

$$(5 - 1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- ¿Cuántas quintas diferentes de basquetball se pueden formar si hay 8 jugadores disponibles para jugar cualquier posición?

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6{,}720$$

También: $$P(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3}!}{\cancel{3}!}$$

$$= 6{,}720$$

2.- ¿Cuántas novenas distintas de baseball pueden formarse con 19 jugadores disponibles, si 4 de ellos solo juegan como lanzadores, 3 solamente como receptores, 7 solo juegan en el cuadro y 5 solo juegan en los jardines.

$$4 \times 3 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4 \times 3 = 604{,}800$$

Resp. 604,800 novenas diferentes.

Ejercicios

EJEMPLOS

3.- ¿De cuántas maneras se pueden escoger 4 cartas de forma consecutiva de un mazo de barajas de 52 cartas?

1ro Con recolocación:

$$52 \times 52 \times 52 \times 52 = 7{,}311{,}616$$

2da Sin recolocación:

$$52 \times 51 \times 50 \times 49 = 6{,}497{,}400$$

4.- ¿De cuántas maneras se puede colocar en un estante 5 libros de álgebra, 2 de biología, 3 de anatomía y 2 de física, de manera que los libros de una misma asignatura estén juntos.

$$4! \times 5! \times 2! \times 3! \times 2! = 69{,}120$$

Ejercicios

EJEMPLOS

5.- ¿De cuántas maneras se pueden sentar en una fila cuatro banilejos, dos veganos, 3 capitaleños y 3 azuanos de manera que los de una misma población se sienten juntos.

$4! \times 4! \times 2! \times 3! \times 3! = 41{,}472$

6.- ¿De cuántas maneras pueden sentarse 3 niños y 2 niñas?

a.- En una fila

$5! = 120$

b.- ¿De cuántas maneras pueden sentarse si los niños y las niñas deben sentarse juntos?

$2! \times 3! \times 2! = 24$

c.- ¿De cuántas maneras pueden sentarse si solamente las niñas se sientan juntas?

$4! \times 2! = 48$

Ejercicios

EJEMPLOS

d.- ¿De cuántas maneras pueden sentarse si solamente los niños se sientan juntos?

$3! \times 3! = 36$

7.- Encontrar el número total de enteros positivos que pueden formarse si ningún dígito ha de repetirse, en ninguno de los enteros, con los dígitos 1,2,3,4.

$$\begin{array}{rcl} 4 & = & 4 \\ 3 \times 4 & = & 12 \\ 2 \times 3 \times 4 & = & 24 \\ 1 \times 2 \times 3 \times 4 & = & \underline{24} \\ & = & 64 \end{array}$$

8..- Hallar n si $P(n,2) = 110$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 110$$

$$n! = 110(n-2)!$$

$$n(n-1)\cancel{(n-2)}! = 110\cancel{(n-2)}!$$

$$n(n-1) = 110$$

$$n^2 - n - 110 = 0$$

$$(n-11)(n+10) = 0$$

$$n = 11$$

$$\cancel{n = -10}$$

Resp. $n = 11$

Ejercicios

EJEMPLOS

9.- Hallar n si P(n,4) = 30 P(n,2)

$$\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{30\times n!}{(n-2)!}$$

$$\cancel{n}!(n-2)! = 30\,\cancel{n}!(n-4)$$

$$(n-2)\,(n-3)\,(n-4)! = 30\,(n-4)!$$

$$(n-2)\,(n-3) = 30$$

$$n^2 - 5n + 6 = 30$$

$$n^2 - 5n + 6 - 30 = 0$$

$$n^2 - 5n - 24 = 0$$

$$(n-8)\,(n+3) = 0$$

$$n = 8$$

$$n = -3$$

Resp. $n = 8$

10.-Hallar r si 2 P(6,r) = 3 P(5,r)

$$2\times\frac{6!}{(6-r)!} = 3\times\frac{5!}{(5-r)!}$$

$$2\times 6!(5-r) = 3\times 5!(6-r)!$$

$$2\times 6\times \cancel{5}!\cancel{(5-r)}! = 3\times\cancel{5}!(6-r)\cancel{(5-r)}!$$

$$2\times 6 = 3\times(6-r)$$

$$4 = 6-r$$

$$r = 6-4$$

$$r = 2$$

Ejercicio #1. Unidad No. 4

I.- Calcular

1.- $6!$

2.- $5!$

3.- $9!$

4.- $\dfrac{8!}{6!}$

5.- $\dfrac{12!}{7!}$

6.- $\dfrac{n!}{(n-1)!}$

7.- $\dfrac{(n+3)!}{(n-2)!}$

8.- $\dfrac{(n-3)!}{(n+1)!}$

9.- $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

10.- $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$

II.- Calcular

1.- $P(6,5)$

2.- $P(6,6)$

3.- $P(7,4)$

4.- $P(8,8)$

5.- $P(10,8)$

6.- $P(7,2)$

7.- $P(9,1)$

8.- $P(11,4)$

9.- $P(5,3)$

10.- $P(9,9)$

III.- Hallar

1.- n en $12\ P(n,2) = P(n,4)$

2.- n en $2\ P(n,3) = P(n,4)$

3.- n en $P(n,2) = 30$

4.- r en $2\ P(6,r) = 3\ P(5,r)$

5.- r en $P(8,r) = 2\ P(7,r)$

IV.- De cuántas maneras se pueden sentar

1.- 9 estudiantes en una fila de 11 asientos

2.- 7 estudiantes en una fila de 15 asientos

3 - 5 estudiantes en una fila de 12 asientos

4.- 8 estudiantes en una fila de 8 asientos

V.- De cuántas maneras puede elegir una asociación que tiene 30 miembros.

1.- Un presidente, un tesorero, un secretario y vocal (ninguna persona se puede elegir para más de un cargo)

2.- De cuántas maneras, si 3 miembros determinados solo se pueden elegir para presidente y también para los demás cargos.

3.- De cuántas maneras, si 3 miembros determinados solo son elegidos para presidente, pero no para los demás cargos.

4.- De cuántas maneras, si 3 miembros determinados no se pueden elegir para presidente, pero si para los demás cargos.

5.- De cuántas maneras, si 3 miembros determinados no se pueden elegir para presidente, ni para los demás cargos.

VI.-

1.- ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 3, 5, 6, 8?

a.- Sin repetición

b.- Con repetición

2.- ¿Cuántos que sean pares?

a.- Sin repetición

b.- Con repetición

3.- ¿Cuántos que sean impares?

a.- Sin repetición

b.- Con repetición

4.- ¿Cuántos que sean divisibles entre 5

a.- Sin repetición

b.- Con repetición

5.- ¿Cuántos comienzan con 3 y terminan en 6?

a.- Sin repetición
b.- Con repetición

6.- ¿Cuántos son mayores de 500?

a.- Sin repetición
b.- Con repetición

7.- ¿Cuántos son menores de 300?

a.- Sin repetición
b.- Con repetición

VII.- ¿De cuántas maneras pueden entrar 3 personas en un edificio de 4 entradas?

VIII.-

a.- ¿De cuántas maneras se pueden sentar en una fila 4 niños y 5 niñas?

b.- ¿De cuántas maneras si los niños siempre están juntos?

c.- ¿De cuántas maneras si las niñas siempre están juntas?

d.- ¿De cuántas maneras si los niños están juntos y las niñas están juntas?

IX.- ¿De cuántas maneras se pueden colocar:

a.- 8 libros en un estante

b.- ¿De cuántas maneras si 3 libros determinados siempre están juntos?

X.- ¿De cuántas maneras se pueden colocar en un estante 4 libros de Algebra, 3 de Química, 2 de Historia y 2 de Anatomía, si los de una misma materia deben ir juntos?

XI.- ¿De cuántas maneras se pueden sentar en una fila:

a.- 8 estudiantes si tres de ellos determinados deben estar juntos.

b.- 12 estudiantes si 4 determinados de ellos no deben estar juntos.

XII.- ¿De cuántas maneras se pueden sentar 8 estudiantes alrededor de un círculo?

XIII.- ¿De cuántas maneras pueden caer si se tiran al aire:

a.-

1.- 2 monedas

2.- 3 monedas

3.- x monedas

b.-

1.- 1 dado

2.- 3 dados

3.- m dados

XIV.- ¿De cuántas maneras se pueden sentar en línea recta 4 estudiantes de Ingeniería, 3 de Química, 2 de Biología y 3 de Física, de manera que los de una misma carrera siempre están juntos y además 2 de los de Ingeniería siempre están juntos y 2 de los de Física siempre están juntos?

XV.- ¿Cuántas novenas de Base Ball se pueden formar diferentes con 25 jugadores si 8 solo juegan como lanzadores, 4 como receptores, 7 solamente en el cuadro y 6 solamente en los jardines?

XVI.- Cuántas sextas de Voley Ball se pueden formar

a.- Con 12 jugadores

b.- Con 9 jugadores, si 3 jugadores determinados solo juegan en una posición.

XVII.- Cuantas señales diferentes se pueden hacer con:

a.- 9 banderas colocadas verticalmente, si hay 3 blancas, 2 verdes y 4 azules.

b.- 10 banderas colocadas verticalmente, si hay 2 rojas, 3 azules, 4 verdes y una blanca.

XVIII.- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden formar brazaletes con:

a.- 8 cuentas de colores diferentes

b.- 10 cuentas de colores diferentes

XIX.- Encontrar el número de enteros positivos que pueden formarse si ningún dígito se repite en ninguno de los enteros. Con los dígitos 3 , 5 , 6 , 7 , 8 .

XX.-

a.- Un Señor tiene 4 sacos diferentes y 6 pantalones. ¿De cuántas maneras diferentes puede vestirse?

b.- ¿De cuántas maneras si siempre usa el mismo saco?

4.4.- Combinaciones

Son diferentes grupos que pueden formarse con n objetos tomados de r en r de manera que dos grupos se diferencien en la naturaleza de sus elementos. Se representa por $C(n.r)$; $r \leq n$.

El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados de r en r está dado por la siguiente fórmula:

FORMULA	
$C(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \dbinom{n}{r}$	Se le llama número combinatorio y se lee n sobre r.

EJEMPLOS

I.- Calcular

1.- $C(6,2) = \dfrac{6!}{(6-2)!2!} = \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{\cancel{6}\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\times \cancel{2}\times 1} = 15$

2.- $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = C(4,3) = \dfrac{4!}{(4-3)!3!} = \dfrac{4!}{1!3!} = \dfrac{4\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4$

3.- $C(5,5) = \dfrac{5!}{(5-5)!5!} = \dfrac{5!}{0!5!} = \dfrac{1}{1} = 1$

4.- $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{6!}{(6-1)!1!} = \dfrac{6\times \cancel{5!}}{\cancel{5!}1!} = \dfrac{6}{1} = 6$

II.- En un estante hay 15 juguetes distintos de los cuales un niño puede elegir 4. ¿De cuántas maneras puedo hacerlo?

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{15!}{(15-4)!4!} = \frac{15\times \overset{7}{\cancel{14}}\times 13\times \overset{3}{\cancel{12}}\times \cancel{11!}}{\cancel{11!}\times \cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times 1} = 1365$$

EJEMPLOS

III.- Un hotel va a obsequiar un almuerzo a 8 de sus clientes. ¿De cuántas maneras se pueden escoger entre 12 de sus clientes?

$$\binom{12}{8} = \frac{12\,!}{(12-8)!\ 8\,!} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}} \times 11 \times \overset{5}{\cancel{10}} \times 9 \times \cancel{8}\,!}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1\,!\ \ \cancel{8}\,!} = 495$$

IV.- ¿Cuántos comités de 4 personas se pueden formar con 9 personas?

$$\binom{9}{4} = \frac{9\,!}{(9-4)!\ 4\,!} = \frac{9 \times \overset{2}{\cancel{8}} \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5}\,!}{\cancel{5}\,!\ \ \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 126$$

V.- ¿Cuántos comités de 5 hombres y 3 mujeres se pueden formar con 9 hombres y 7 mujeres?

$$\binom{9}{5} = \frac{9\,!}{(9-5)!\ 5\,!} = \frac{9 \times \overset{2}{\cancel{8}} \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4}\,!}{\cancel{4}\,!\ \ \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 126$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7\,!}{(7-3)!\ 3\,!} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4}\,!}{\cancel{4}\,!\ \ \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 35$$

126 x 35 = 4,410

EJEMPLOS

VI.- Se tiene 10 puntos coplanares (en un mismo plano) no situados 3 de ellos en línea recta.

1.- Encontrar el número de triángulos diferentes que pueden formarse usando esos puntos como vértice.

$$\binom{10}{3} = \frac{10\,!}{(10-3)!\ 3\,!} = \frac{10 \times \overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{4}{\cancel{8}} \times 7\,!}{7\,!\ \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 120$$

2.- Encontrar cuantos de estos triángulos tienen un punto determinado como vértice.

$$\binom{9}{2} = \frac{9\,!}{(9-2)!\ 2\,!} = \frac{9 \times \overset{4}{\cancel{8}} \times 7\,!}{7\,!\ \cancel{2} \times 1} = 36$$

VII.- Una caja contiene 7 bolas rojas y 6 bolas blancas. Hallar el número de maneras en que se pueden sacar 4 bolas de la caja si:

1ro. Pueden ser de cualquier color.

$$\binom{13}{4} = \frac{13\,!}{(13-4)!\ 4\,!} = \frac{13 \times \overset{3}{\cancel{12}} \times 11 \times \overset{5}{\cancel{10}} \times 9\,!}{\cancel{9}\,!\ \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 715$$

EJEMPLOS

2do. Dos deben ser rojas y dos blancas.

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!\ 2!} = \frac{7 \times \overset{3}{\cancel{6}} \times \cancel{5}!}{\cancel{5}!\ \cancel{2} \times 1} = 21$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!\ 2!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \times 5 \times \cancel{4}!}{\cancel{4}!\ 2 \times 1} = 15$$

$$21 \text{ x } 15 = 315$$

Resp. 315

3ro. Todas deben ser del mismo color.

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!\ 4!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2}!}{\cancel{2}!\ \cancel{4} \times \cancel{3} \times 2 \times 1} = 15$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!\ 4!} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3}!}{3!\ \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 35$$

$$35 + 15 = 50$$

Resp. 50

EJEMPLOS

VIII.-Se va a escoger un comité de 7 alumnos entre 9 alumnos de último año y 8 alumnos de penúltimo año. Hallar el número de estos comités, si deben tener.

1ro. Exactamente 4 alumnos de último año.

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{(9-4)!4!} = \frac{9 \times \overset{2}{\cancel{8}} \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5}!}{\cancel{5}!\ \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 126$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5}!}{\cancel{5}!\ \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 56$$

126 x 56 = 7,056

Resp. 7,056

2do. Por lo menos 5 alumnos de último año.

$$\text{a.-}\binom{9}{5} = \frac{9!}{(9-5)!\ 5!} = \frac{9 \times \overset{2}{\cancel{8}} \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5}!}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{5}!} = 126$$

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{(8-2)!\ 2!} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \times 7 \times \cancel{6}!}{\cancel{6}! \times \cancel{2} \times 1} = 28$$

126 x 28 = 3,528

Resp. 3,528

EJEMPLOS

$$\text{b.-}\binom{9}{6}=\frac{9!}{(9-6)!\ \ 6!}=\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\times\overset{4}{\cancel{8}}\times 7\times\cancel{6}!}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1\times\cancel{6}!}=84$$

$$\binom{8}{1}=\frac{8!}{\left(8-1\right)!\ \ 1!}=\frac{8\times 7!}{7!\times 1}=8$$

84 x 8 = 672

Resp. 672

$$\text{c.-}\binom{8}{0}=\frac{8!}{(8-0)!\ \ 0!}=\frac{\cancel{8}!}{\cancel{8}!\times 1}=\frac{1}{1}=1$$

$$\binom{9}{7}=\frac{9!}{\left(9-7\right)!\ \ 7!}=\frac{9!}{2!7!}=\frac{9\times\overset{4}{\cancel{8}}\times 7!}{\cancel{2}\times 1\times\cancel{7!}}=36$$

36 x 1 = 36

Resp. 36

3,528 + 672 + 36 = <u>4,236</u>

EJEMPLOS

IX.- Hallar el valor de n si $2\ C(n,5) = 3\ C(n,3)$

$$2 \times \frac{n!}{(n-5)!\ 5!} = 3 \times \frac{n!}{(n-3)!\ 3!}$$

$$2 \times \cancel{n}!\ (n-3)!\ 3! = 3 \times \cancel{n}!\ (n-5)!\ 5!$$

$$2(n-3)(n-4)(n-5)!\ 3! = 3(n-5)!\ 5 \times 4 \times 3!$$

$$2\ (n-3)\ (n-4) = 3 \times 5 \times 4$$

$$(n-3)\ (n-4) = 30$$

$$n^2 - 7n + 12 = 30$$

$$n^2 - 7n + 12 - 30 = 0$$

$$n^2 - 7n - 18 = 0$$

$$(n-9)\ (n+2) = 0$$

$$n - 9 = 0 \qquad n + 2 = 0$$

$$n = 9 \qquad n = -2$$

Resp. $n = 9$

EJEMPLOS

X.- Un señor compra 5 vacas, 4 chivos y 5 gallinas a un hombre que tiene 9 vacas, 7 chivos y 10 gallinas. ¿De cuántas maneras puede hacer la compra?

Las vacas las puede comprar de la siguiente manera: $\binom{9}{5}$, los chivos $\binom{7}{4}$; y las gallinas $\binom{10}{5}$

$$1\text{ro. } \binom{9}{5} = \frac{9!}{(9-5)!\ 5!} = \frac{9!}{4!\ 5!}$$

$$= \frac{9 \times \overset{2}{\cancel{8}} \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5}!}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{5}!} = 126$$

$$2\text{do. } \binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!\ 4!} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4}!}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{4}!} = 35$$

$$3\text{ro. } \binom{10}{5} = \frac{10!}{(10-5)!\ 5!}$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{10}} \times 9 \times \cancel{8} \times 7 \times \overset{2}{\cancel{6}} \times \cancel{5}!}{\cancel{5}! \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 252$$

126 x 35 x 252 = 1,111,320

El señor puede comprar de 1,111,320 maneras diferentes.

EJEMPLOS

XI.- Un estudiante debe responder 7 de 11 preguntas en un examen.

1ro. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

2do. ¿De cuántas maneras si debe responder las 4 primeras preguntas?

3ro. ¿De cuántas maneras si tiene que responder por lo menos 3 de las primeras 6 preguntas?

1ro. $\binom{11}{7} = \dfrac{11!}{(11-7)!\ 7!}$

$$= \frac{11 \times 10 \times \overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{2}{\cancel{8}} \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4!}}{\cancel{4!} \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 330$$

2do. $\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{(7-3)!\ 3!} = \dfrac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 35$

3ro. a.- $\binom{6}{3} \times \binom{5}{4} = 20 \times 5 = 100$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\ 3!} = \frac{\cancel{6} \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 20$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{(5-4)!\ 4!} = \frac{5 \times \cancel{4!}}{1 \times \cancel{4!}} = 5$$

EJEMPLOS

b.- $\binom{6}{4} \times \binom{5}{3} = 15 \times 10 = 150$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!\ 4!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{4!}} = 15$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\ 3!} = \frac{5 \times \overset{2}{\cancel{4}} \times \cancel{3!}}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{3!}} = 10$$

c.- $\binom{6}{5} \times \binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60$

$$\binom{6}{5} = \frac{6!}{(6-5)!\ 5!} = \frac{6 \times \cancel{5!}}{1 \times \cancel{5!}} = 6$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!\ 2!} = \frac{5!}{3!\ 2!} = \frac{5 \times \overset{2}{\cancel{4}} \times \cancel{3!}}{1 \times \cancel{3!}}$$

$$= 10$$

EJEMPLOS

d.- $\binom{6}{6} \times \binom{5}{1} = 1 \times 5 = 5$

$$\binom{6}{6} = \frac{6!}{(6-6)!\ 6!} = \frac{\cancel{6}!}{0!\ \cancel{6}!} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{(5-1)!\ 1!} = \frac{5 \times \cancel{4}!}{\cancel{4}! \times 1} = 5$$

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{5}{4} + \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{3} + \binom{6}{5} \cdot \binom{5}{2} + \binom{6}{6} \cdot \binom{5}{1} =$$

$$100 + 150 + 60 + 5 = 315$$

Respuesta **<u>315</u>**

4.5.- Particiones Ordenadas

Sea *A*, que contiene *n* elementos, y sean P_1, P_2, P_3, P_4, enteros positivos de manera que: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = n$.

Existen $\dfrac{n!}{P_1! \times P_2! \times P_3! \times P_4!}$**, particiones ordenadas diferentes de *A*.**

EJEMPLOS

1.- ¿De cuántas maneras se pueden repartir 11 juguetes entre 4 niños, si el mayor debe recibir 3 juguetes, el que le sigue 2 juguetes, el otro cuatro juguetes y el menor 2 juguetes.

$$\frac{11!}{3!\ 2!\ 4!\ 2!}=\frac{11\times 10\times 9\times \overset{2}{\cancel{8}}\times 7\times \cancel{6}\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{3}\times \cancel{2}\times 1\times \cancel{2}\times 1\times \cancel{4!}\times \cancel{2}\times 1}$$

$$=69,300$$

2.- Calcular el número de maneras distintas en que 13 libros diferentes pueden dividirse en tres grupos de 8, 3 y 2 libros respectivamente.

$$\frac{13!}{8!\times 3!\times 2!}=\frac{13\times \cancel{12}\times 11\times 10\times 9\times \cancel{8!}}{\cancel{8!}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times 1\times \cancel{2}\times 1}$$

$$=12,870$$

Ejercicio #2. Unidad No. 4.

I.- Calcular

1.- $\binom{8}{2}$

2.- $\binom{7}{3}$

3.- C (5 , 5)

4.- C (8 , 1)

5.- C (9 , 8)

6.- $\binom{7}{2}$

7.- $\binom{11}{3}$

8.- $\binom{10}{4}$

9.- $\binom{12}{6}$

10.- C (6 , 4)

II.- Hallar

1.- n Si $\binom{n}{4}=\binom{n}{6}$

2.- n Si $\binom{11}{7}=\binom{n}{4}$

3.- n Si $\binom{n}{8}=\binom{13}{5}$

4.- r Si $\binom{7}{2}=\binom{7}{r}$

5.- r Si $\binom{9}{r}=\binom{9}{4}$

6.- r Si $\binom{8}{r}=\binom{8}{3}$

III.- Cuántos comités de:

a.- 6 personas se pueden formar con 12 personas

b.- 7 personas se pueden formar con 12 personas.

IV.- En una piscina hay 8 peces distintos, de los cuales se pueden escoger 5. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

V.- ¿Cuántos comités de 6 hombres y 5 mujeres se pueden formar con 8 hombres y 9 mujeres.

VI.- Un estudiante tiene que responder 10 preguntas de un temario de 13 preguntas. ¿Cuántas selecciones tiene?

VII.- Se tienen 15 puntos coplanares no situados, tres de ellos en línea recta.

1.- Encontrar el número de triángulos diferentes que pueden formarse.

2.- ¿Cuántos de estos triángulos tienen un vértice común?

VIII.- Una caja contiene 5 bolas negras y 4 bolas blancas. Hallar el número de maneras en que se pueden sacar 6 bolas:

1.- 6 bolas de cualquier color

2.- 2 sean negras y 4 blancas

3.- 4 sean negras y 2 blancas

4.- Por lo menos 2 sean negras

5.- Por lo menos 2 sean blancas

6.- A lo más 2 sean negras

7.- A lo más 3 sean blancas

IX.- Un alumno tiene que responder 8 preguntas de un temario de 13:

a.- ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

b.- ¿De cuántas maneras si tiene que responder las primeras 3 preguntas?

c.- ¿De cuántas maneras si tiene que responder por lo menos 5 de las primeras 7 preguntas?

d.- ¿De cuántas maneras si tiene que responder a lo más 3 de las 6 primeras?

X.- Un señor desea comprar en un Hotel 6 carnes, 4 pastas, 3 sopas y 2 postres. Si el Hotel tiene disponible 8 carnes, 6 pastas 5 sopas y 4 postres. ¿Cuántas selecciones puede hacer?

XI.- De cuántas maneras pueden repartir:

a.- 15 lapiceros distintos entre 4 niños de manera que el menor reciba 3, el mayor 6, el que le sigue al mayor 2 y el otro 4.

b.- 10 peces de colores distintos entre 3 niños, de manera que uno reciba 4, otro la mitad de este y el último el resto.

XII.- Calcular el número de formas diferentes en que:

a.- 8 bolígrafos pueden dividirse en grupos de 3, 3 y 2, bolígrafos respectivamente.

b.- 11 estuches distintos pueden dividirse en grupos de 4, 3, 2 y 2 estuches respectivamente.

XIII.- De cuántas maneras se pueden repartir 15 personas de 4 grupos de:

a.- 3, 4, 6 y 2 personas

b.- De 5, 2, 6, 2

XIV.- Un hotel ofrece una comida a 8 clientes:

1.- ¿De cuántas maneras se pueden escoger entre 12 de sus clientes?

2.- ¿De cuántas se pueden escoger si 3 de los clientes no van juntos?

XV.- De cuántas maneras se pueden formar con 15 estudiantes:

a.- Un comité de 6 estudiantes

b.- Un comité de 6 estudiantes, si dos estudiantes determinados no estan juntos en el comite.

c) Un comite de 6 estudiantes si dos de los estudiantes determinados siempre están juntos.

4.6.- Teorema del Binomio

Con este teorema se pueden obtener directamente los términos del desarrollo de una potencia entera y positiva de un binomio: $(a + b)^n$

Por multiplicaciones directas vamos a escribir su desarrollo, para los valores de $n = 0$ hasta $n = 5$; vamos a observar las características que tienen estos desarrollos.

DESARROLLOS	
$(a + b)^0 =$	1
$(a + b)^1 =$	$a + b$
$(a + b)^2 =$	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a + b)^3 =$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a + b)^4 =$	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a + b)^5 =$	$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

4.6.1.- Características

1ro. El número de términos del desarrollo es una unidad más que el exponente del binomio.

2do. En el primer término el exponente de a es n, y va decreciendo de unidad en unidad en cada uno de los términos siguientes.

3ro. La letra b aparece en el segundo término con exponente igual a la unidad y va aumentando de unidad en unidad en cada término siguiente.

Nota: El exponente de b es siempre una unidad menos que el orden del término en que se encuentra.

4to. La suma de los exponentes de a y b en cualquier término es igual al exponente del binomio.

5to. Los coeficientes de los términos que equidistan de los extremos son iguales.

6to. El coeficiente del primer término y el último término es la unidad y el coeficiente del segundo término es el exponente del binomio.

7mo. El coeficiente de cualquier término se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente de a, y dividiendo este producto entre el exponente de b aumentado en uno.

Si el exponente de un binomio es par, el desarrollo tiene un número impar de términos, y por lo tanto tiene un término central.

Para calcular el lugar del término central se divide entre dos el exponente y se le suma uno.

EJEMPLO

$(a + b)^8$, tiene 9 términos, por lo tanto tiene un término central, y su lugar es

$8/2 + 1 = 4 + 1$. El quinto lugar.

Si el exponente del binomio es impar, el desarrollo del binomio tiene un número par de términos y por lo tanto tiene 2 términos centrales.

Para calcular los lugares de los dos términos centrales se aumenta en uno el exponente y se divide entre dos, ese es el lugar del primer término central, el siguiente es el lugar del otro término central.

EJEMPLO

$$(a+b)^9; \quad \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5\text{to y } 6\text{to}$$

Ejercicio

EJEMPLO

Hacer el desarrollo usando el teorema del binomio.

1.- $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^3 + b^4$

2.- $(2a - 3b)^5 = (2a)^5 - 5(2a)^4(3b)$
$+ 10(2a)^3(3b)^2 - 10(2a)^2(3b)^3$
$5(2a)(3b)^4 - (3b)^5$
$= 32a^5 - 240a^4b + 720a^3b^2$
$- 1080a^2b^3 + 810ab^4 - 243b^5$

3.- $(a^2 + b^3)^4 = (a^2)^4 + 4(a^2)^3(b^3) + 6(a^2)^2(b^3)^2$
$+ 4(a^2)(b^3)^3 + (b^3)^4$
$= a^8 + 4a^6b^3 + 6a^4b^6 + 4a^2b^9 + b^{12}$

4.6.2.- Teorema del Binomio

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\times 2}$$

$$a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}$$

$$a^{n-3}b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)}{1\times 2}\; a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}$$

$$a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}b^r$$

$\sum$ letra griega llamada sigma, significa ***sumatoria***.

EJEMPLO

Hacer el desarrollo usando los coeficientes binómicos (números combinatorios).

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4b + \binom{5}{2} a^3b^2 + \binom{5}{3} a^2b^3 -$$

$$\binom{5}{4} ab^4 + \binom{5}{5} b^5$$

$$= \quad a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

El coeficiente numérico de $a^{n-r}\,b^r$ es $\binom{n}{r}$ en el desarrollo de $(a+b)^n$.

EJEMPLOS

1.- Hallar solamente el tercer término del desarrollo de $(a + b)^5$.

$$\binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{5}{2} a^{5-2} b^2$$

$$\binom{5}{2} a^3 b^2 = \frac{5!}{(5-2)!\ 2!}\ a^3 b^2 = \frac{5\times\cancelto{2}{4}\times\cancel{3}!}{\cancel{3}!\times\cancel{2}\times1} = 10\ a$$

2.- Hallar el 5to. término de $(3X^2 - 2y^3)^8$.

$$2^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

$$\binom{8}{4} (3x^2)^{8-4} \quad (-2y^3)^4$$

$$\binom{8}{4} \left(3x^2\right)^4 \left(-2y^3\right)^4 = \frac{8!}{(8-4)!\ 4!} \cdot \left(81x^8\right)\left(16y^{12}\right)$$

$$= \frac{8!}{4!\ 4!}\ 1296\ x^8 y^{12}$$

$$= \frac{\cancelto{2}{8}\times7\times\cancel{6}\times5\times\cancel{4}!}{\cancel{4}!\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}\ 1296\ x^8 y^{12}$$

$$= (70)\ (1296\ x^8\ y^{12})$$

$$= 90{,}720\ x^8\ y^{12}$$

EJEMPLOS

3.- Obtener el término que contiene X^{10} en el desarrollo de $(2x^2 - y^3)^8$

$$x^{10} = ? \text{ en } (2x^2 - y^3)^8$$

$$\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$\binom{8}{r} \left(2x^2\right)^{8-r} \left(-y^3\right)^r$$

$$(x^2)^{8-r} = x^{10}$$

$$x^{2(8-r)} = x^{10}$$

$$x^{16-2r} = x^{10}$$

$$16 - 2r = 10$$

$$-2r = 10 - 16$$

$$-2r = -6$$

$$r = -6/-2$$

$$r = 3$$

EJEMPLOS

$$\binom{8}{3}\left(2x^{2}\right)^{8-3}\left(-y^{3}\right)^{3}$$

$$\frac{8!}{\left(8-3\right)\,!\;3!}\left(2x^{2}\right)^{5}\left(-y^{9}\right)$$

$$\frac{8!}{5!\;3!}\left(32x^{10}\right)\left(-y^{9}\right)$$

$$\frac{8\times 7\times \cancel{6}\times \cancel{5}\,!}{\cancel{5}\,!\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times 1}\left(-32x^{10}y^{9}\right)$$

$$56\left(-32x^{10}y^{9}\right)$$

$$-1792\,x^{10}y^{9}$$

4.- Obtener el término que contiene x^8 en el desarrollo

de $\left(2x^{2}-\dfrac{xy}{2}\right)^{9}$

$$\binom{n}{r}\left(2x^{3}\right)^{n-r}\left(-\frac{xy}{3}\right)^{r}$$

EJEMPLOS

$$\binom{8}{r}\left(2x^3\right)^{8-r}\left(-\frac{xy}{3}\right)^r$$

$$(x^3)^{8-r}(x)^r = x^8$$

$$x^{3(8-r)} = x^8$$

$$x^{24-3r}x^r = x^8$$

$$x^{24-2r} = x^8$$

$$24 - 2r = 8$$

$$-2r = 8 - 24$$

$$r = \frac{-16}{-2}$$

$$r = 8$$

$$\binom{8}{8}\left(2x^3\right)^{8-8}\left(-\frac{xy}{3}\right)^8$$

$$\frac{8!}{(8-8)!\ 8!}\left(2x^3\right)^0\left(\frac{x^8y^8}{6,561}\right)$$

$$\frac{8!}{0!\ 8!}\times 1\times\frac{x^8y^8}{6,561}$$

EJEMPLOS

$$1 \times 1 \times \frac{x^8y^8}{6{,}561}$$

$$\frac{x^8y^8}{6{,}561}$$

5.- **Obtener el término central de** $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^{10}$

$$\frac{10}{2} + 1 = 5 + 1 = 6$$

término sexto (6to.)

$$\binom{n}{r} a^{n-r}b^r$$

$$\binom{10}{5} \left(\frac{a}{b}\right)^{10-5} \left(\frac{-b}{a}\right)^5$$

$$\frac{10!}{(10-5)!\ 5!} \left(\frac{\cancel{a}^5}{\cancel{b}^5}\right) \left(-\frac{\cancel{b}^5}{\cancel{a}^5}\right)$$

$$\frac{10!}{5!\ 5!} (-1)$$

$$\frac{\overset{2}{\cancel{10}} \times 9 \times \overset{2}{\cancel{8}} \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5}!}{\cancel{5}! \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} (-1)$$

$$(252)\ (-1)$$

Resp. −252

4.7.- Triángulo de Pascal

Con el Triángulo de Pascal se encuentran los coeficientes de los términos del desarrollo de $(a+b)^n$ para los valores enteros y positivos de n. A estos coeficientes se le llaman coeficientes binomiales o binómicos.

EJEMPLO

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$1$$

$$1 + 1$$

$$1 + 2 + 1$$

$$1 + 3 + 3 + 1$$

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1$$

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$$

El triángulo de Pascal es una forma triangular de números que tiene las siguientes propiedades.

1.- El primer y último número de cada fila es igual a la unidad.

2.- Cada número interior del triángulo se obtiene sumando los dos números que están en la fila inmediata superior a la izquierda y la derecha.

3.- El número de filas del triángulo es una unidad mayor que el exponente del binomio.

4.- Estos coeficientes se les llaman binómicos o binomiales y se pueden escribir en una disposición triangular de números de la siguiente manera.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Ejercicio

EJEMPLO

1.- **Demostrar que** $16 = 2^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

$$(1+1)^4 = \binom{4}{0}(1)^4 + \binom{4}{1}(1)^3(1) + \binom{4}{2}(1)^2(1)^2 +$$

$$\binom{4}{3}(1)(1)^3 + \binom{4}{4}(1)^4$$

$$2^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

Comprobación

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{(4-0)!\ 0!} = \frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!}\ 1!} = 1$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}\times 1!} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!\ 2!} = \frac{4!}{2!\ 2!} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\times 3\times\cancel{2!}}{\cancel{2!}\times\cancel{2}\times 1} = 6$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!\ 3!} = \frac{4!}{1!\ 3!} = \frac{4\times\cancel{3!}}{1\times\cancel{3!}} = 4$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{(4-4)!\ 4!} = \frac{4!}{0!\ 4!} = \frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 1$$

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

Cuando se nos pide hallar el término independiente de x o de y en el desarrollo de $(a + b)^n$, ese término tiene a x elevado a cero o a y elevado a cero.

Ejercicio # 3. Unidad No. 4

I.- Hallar el desarrollo usando el teorema del binomio.

1.- $(3x + 4y)^3$

2.- $(5x - y)^4$

3.- $(x + 4y^3)^5$

4.- $(2x^2 - 3y^3)^6$

5.- $(2x^4 + 3y^5)^4$

6.- $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{2}{3}y^2\right)^3$

7.- $\left(\frac{1}{2}x^2 + 2y\right)^4$

8.- $\left(x^{\frac{1}{2}} - 2y^{\frac{1}{3}}\right)^5$

9.- $\left(2x^{\frac{1}{3}} + 3y^{\frac{1}{2}}\right)^4$

10.- $\left(3x^{\frac{2}{3}} - 3y^{\frac{1}{3}}\right)^6$

II.- Hallar solamente el:

1.- 4to. término del desarrollo de $(3x^2 - 2y^3)^5$

2.- 3er. término del desarrollo de $(x - 3y^3)^4$

3.- 9no. término del desarrollo de $\left(x - \dfrac{2}{x^{1/2}}\right)^{10}$

4.- 5to. término del desarrollo de $(x^3 - 2y^2)^6$

5.- El término central de $(4x^2 - 3y^3)^8$

6.- El término central de $(2x^3 + 4y^2)^{10}$

7.- Los dos términos centrales de $(3x - 2y)^9$

8.- Los dos términos centrales de $\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}\right)^{11}$

9.- El término independiente de x en el desarrollo de $(2x^4 - 3y^2)^7$

10.-El término independiente de y en el desarrollo de $(x^3 + 4y^2)^8$

11.-El término que contiene x^6 en el desarrollo de $(2x^2 + y^3)^6$

12.-El término que contiene x^{12} en el desarrollo de $\left(x^3 - \frac{y}{3}\right)^9$

13.-El término que contiene y^6 en el desarrollo de $(x^2 + 3y)^9$

14.-El término que contiene y^4 en el desarrollo de $(4x - 2y^2)^8$

15.-El término que contiene x^{15} en el desarrollo de $(2x^3 - 3y^2)^6$

16.-El término que contiene y^9 en el desarrollo de $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)^4$

III.- Hallar el desarrollo usando los coeficientes binómicos

1.- $(3x^2 + y)^5$

2.- $(4a^3 - 2y^2)^6$

3.- $(x - 2y)^4$

4.- $(3x^2 - 4y^3)^3$

5.- $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}y\right)^5$

IV.- Demostrar que:

1.- $2^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

2.- $2^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

V.- Usar el triángulo de Pascal para hallar el desarrollo de

1.- $(4x - 2y^2)^4$

2.- $(3x^2 + 2y^3)^3$

3.- $(4x + 3y^4)^5$

4.- $(2x^2 - y^2)^6$

Ejercicios de Repaso
UNIDAD No. 4

I.- Calcular:

1.- $\dfrac{(n-2)!}{(n+1)!}$

2.- $\dfrac{(n-3)!}{(n-1)!}$

3.- $\dfrac{(n+1)!}{(n+2)!}$

4.- $\dfrac{n}{(n-3)!}$

II.- Calcular:

1.- P (6,2)

2.- P (8,3)

3.- P (6,1)

4.- P (8,7)

5.- C (6,2)

6.- C (5,1)

7.- $\binom{6}{5}$

8.- $\binom{9}{2}$

III.- Obtener el término que contiene; (sin efectuar el desarrollo)

1.- x^8 en el desarrollo de $(2x^3 + 3y^2)^9$

2.- y^6 en el desarrollo de $(3x^3 - 2y^3)^8$

IV.- Obtener sin hacer el desarrollo:

1.- El 4to. término de $(4x - y^2)^{10}$

2.- El término central de $(2x^3 + 4y^2)^{12}$

3.- El término independiente de x en $(x - 2y^2)^5$

V.- Cuántos números de 3 cifras se pueden forman con las cifras 0, 2, 3, 4, 5, 7, 9. Sin repetición que sean:

a.- Pares

b.- Impares

c.- Mayores de 400

d.- Menores de 700

e.- Divisible entre 5.

VI.- De cuántas maneras se pueden repartir 13 personas en grupos

a.- 3, 4 y 6 personas

b.- 2 de 5 personas cada uno y el otro de 3

VII.- Cuántas permutaciones se pueden formar con las letras de la palabra ANDREUS entrando todas.

a.- Cuántas terminan en D.

b.- Cuántas no comienzan con S.

c.- Cuántas comienzan con R.

VIII.-

a.- De cuántas maneras se pueden sentar en una fila 4 niños y 3 niñas.

b.- De cuántas maneras si las niñas se sientan juntas

c.- De cuántas maneras si los niños se sientan juntos.

d.- De cuántas maneras, si los niños se sientan juntos y las niñas se sientan juntas.

IX.-

a.- De cuántas maneras se pueden elegir para formar un comité de 6 personas de entre 12.

b.- De cuántas maneras si en cada comité hay una persona determinada.

X.- Una urna tiene 6 bolas verdes y 5 blancas.

a.- De cuántas maneras se pueden sacar 4 bolas que sean del mismo color.

b.- De cuántas maneras se pueden sacar 5 bolas de manera que 3 sean de un color y 2 del otro.

UNIDAD No. 5

Sucesiones

UNIDAD No. 5

Sucesiones

5.1.- Sucesión

Es un conjunto de números ordenados y formado de manera que cada término *n* se obtenga de acuerdo con una ley dada. Esta ley representa el término general de la sucesión y está en función de *n*, siendo *n* el orden de dicho término en la sucesión.

EJEMPLO

Sea la sucesión 3, 5, 7, 9, ... , 2n + 1
n igual al número de términos
Un = término general = 2n + 1

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ 2n + 1$$

n = 1
2n + 1 = 2 (1) + 1 = 3

n = 2
2n + 1 = 2 (2) + 1 = 5

n = 3
2n + 1 = 2 (3) + 1 = 7

Con la fórmula Un = 2n + 1, se puede obtener cualquier término de la sucesión.

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Escribir los 5 primeros términos y el término 12 de la siguiente sucesión que tiene como término general 2^{n-1}.

n = 1
$2n - 1 = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$

n = 2
$2n - 1 = 2(2) - 1 = 3$

n = 3
$2n - 1 = 2(3) - 1 = 5$

n = 12
$2(12) - 1 = 23$

2.- Escribir los tres primeros términos y el término 11 de la sucesión, cuyo término general es 2^{n-2}.

n = 1
$2^{1-2} = 2^{-1} = 1/2$

n = 2
$2^{2-2} = 2^{0} = 1$

Ejercicios

EJEMPLOS

$n = 3$

$2^{3-2} = 2^1 = 2$

$n = 11$

$2^{11-2} = 2^9 = 512$

3.- Escribir los 4 primeros términos de la sucesión que tiene como término general $\dfrac{n+1}{n}$ el término 8 de la sucesión.

$n = 1$

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$n = 2$

$$\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$n = 3$

$$\frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$n = 4$

$$\frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$n = 8$

$$\frac{8+1}{8} = \frac{9}{8}$$

4.- Escribir los tres primeros términos de la sucesión y el 9° término que tiene como término general $\dfrac{a^{3n-1}}{(n+2)!}$

Para $n = 1$

$$\frac{a^{3(1)-1}}{(1+2)!} = \frac{a^{3-1}}{3!} = \frac{a^{2}}{3!}$$

Para $n = 2$

$$\frac{a^{3(2)-1}}{(2+2)!} = \frac{a^{5}}{4!}$$

Para $n = 3$

$$\frac{a^{3(3)-1}}{(3+2)!} = \frac{a^{8}}{5!}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

Para n = 9

$$\frac{a^{3(9)-1}}{(9+2)!} = \frac{a^{26}}{11!}$$

5.2.- Serie

Es la suma indicada de los términos de una sucesión; y esta puede ser finita o infinita, según que la sucesión que la forma sea finita o infinita.

5.3.- Progresión Aritmética

Una progresión aritmética es una sucesión de números, de manera que después del primero cada término se obtiene sumándole al anterior un número fijo llamado diferencia *(d)*.

EJEMPLO

$$a_1 \;,\; a_1 + d \;,\; a_1 + 2d \;,\; \ldots \;,$$

Cuando se conocen dos términos consecutivos de una progresión aritmética se resta al posterior el anterior. Para hallar d.

EJEMPLOS

1.- Sea 2,5,8,11, ... una progresión aritmética. Hallar d.

$$d = 5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 3$$

2.- Determine cuales de las siguientes sucesiones forman una progresión aritmética.

a.- 4,7,10,13, ... ,

$d = 7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 3$ **<u>si</u>**

b.- 14, 12, 10, 8 ,... ,

$d = 12 - 14 = 10 - 12 = 8 - 10 = -2$ **<u>si</u>**

c.- 8, 13, 15, ...

$d = \underbrace{13 - 8}_{5} \neq \underbrace{15 - 13}_{2}$ **<u>no es</u>**

d.- -2, 4, 8, 10, ... ,

$d = 4 - (-2) = 6$

$8 - 4 = 4$ **<u>no es</u>**

EJEMPLOS

e.- $2x - y,\ 4x + 2y,\ 6x + 5y, \ldots,$

$$4x + 2y - (2x - y) \qquad\qquad 6x + 5y - (4x + 2y)$$

$$\begin{array}{rr} 4x + 2y & \\ -2x + \ \ y & \\ \hline d = \ 2x + 3y & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} 6x + 5y & \\ -4x - 2y & \\ \hline d = \ 2x + 3y & \end{array}$$

<u>**sí es**</u>

5.3.1.- Elementos de una Progresión Aritmética

a_1 = Primer término

d = Diferencia

n = Número de término

a_n = Ultimo Término (término enésimo)

S_n = Suma de los n primeros términos

5.3.1.1.- Ultimo Término de una Progresión Aritmética

Sea la progresión aritmética $a_1,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d, \ldots$

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d$$

EJEMPLOS

a.- $a_5 = a_1 + 4d$

b.- $a_{13} = a_1 + 12d$

c.- $a_{24} = a_1 + 23d$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Hallar el término 15 de la siguiente progresión aritmética: 2, 6, 10, 14, ... ,

$a_1 = 2$
$d = 6 - 2 = 4$
$n = 15$
$a_{15} = ?$

$a_{15} = a_1 + 14d$
$a_{15} = 2 + 14\ (4)$
$a_{15} = 2 + 56$
$a_{15} = 58$

Fórmula para hallar la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

FÓRMULAS

1º Cuando se conoce el último término

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$$

FÓRMULAS

2º Cuando no se conoce el último término

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Hallar el 9no término y la suma de los primeros 15 términos de la siguiente progresión: $-4, -2, 0, 2, \ldots,$

$a_1 = -4$

$d = -2 - (-4) = -2 + 4 = 2$

$n = 9,\ n = 15$

$a_9 = ?$

$S_{15} = ?$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_9 = -4 + 8(2)$

$a_9 = -4 + 16$

$a_9 = 12$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$S_{15} = \frac{15}{2}\ \left[2(-4)+(15-1)\ (2)\right]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\ \left[-8+30-2\right]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\ (20)$$

$$S_{15} = 150$$

2.- Hallar a_n y S_n en la siguiente progresión aritmética: 2, 5, 8, 11, ... , hasta 10 términos, usando para la suma las dos formulas.

$a_1 = 2$
$d = 5 - (2) = 3$
$n = 10$
$a_{10} = a_1 + 9d = 2 + 9\ (3) = 2 + 27 = 29$

$$S_{10} = \frac{n}{2}\ (a_1 + a_{10})$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}\ (2+29)$$

$$S_{10} = 5\ (31)$$

$$S_{10} = 155$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$S_{10} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\ d\right]$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left[2\ (2) + (10-1)\ 3\right]$$

$$S_{10} = 5\ [4 + 30 - 3]$$

$$S_{10} = 5\ (31)$$

$$S_{10} = 155$$

3.- Hallar el valor de h para que $2h + 1$, $h + 6$, $4h - 1$ formen una progresión aritmética.

$$2h + 1,\ h + 6,\ 4h - 1$$

$$h + 6 - (2h + 1) = 4h - 1 - (h + 6)$$

$$h + 6 - 2h - 1 = 4h - 1 - h - 6$$

$$-h + 5 = 3h - 7$$

$$-h - 3h = -7 - 5$$

$$-4h = -12$$

$$h = -12/-4$$

$$h = 3$$

Ejercicios

EJEMPLOS

4.- ¿Cuántos términos debe tener la progresión aritmética 2, 7, 12,... , para que su suma sea 119?

$S_n = 119$
$a_1 = 2$
$d = 7 - 2 = 5$
$n = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

$$119 = \frac{n}{2}\left[2(2) + (n-1)5\right]$$

$$2 \times 119 = n\,[4 + 5n - 5]$$

$$238 = n\,[-1 + 5n]$$

$$238 = -n + 5n^2$$

$$5n^2 - n - 238 = 0$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(5)(-238)}}{2(5)}$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4760}}{10}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{4761}}{10} = \frac{1 \pm 69}{10}$$

$$\frac{1+69}{10} = \frac{70}{70} = 7$$

$$\frac{1-69}{10} = \frac{68}{10} = -\frac{34}{5}$$

Resp. n = 7

5.- Hallar el 9no. término y la suma de los primeros 9 términos de $2x + 2y$, $3x + 2y$, $4x + 2y$

$$a_1 = 2x + 2y$$

$$d = 3x + 2y - (2x + 2y)$$

$$d = 3x + \cancel{2y} - 2x - \cancel{2y}$$

$$d = x$$

$$a_9 = a_1 + 8d$$

$$a_9 = 2x + 2y + 8x$$

$$a_9 = 10x + 2y$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$S_9 = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_9\right)$$

$$S_9 = \frac{9}{2}\left(2x+2y+10x+2y\right)$$

$$S_9 = \frac{9}{2}\left(12x+4y\right)$$

$$S_9 = 9\left(6x+2y\right)$$

$$S_9 = 54x+18y$$

6.- El tercer término de una progresión aritmética es 10 y el sexto término 22. Hallar el término de lugar 12.

$a_3 = 10$

$a_6 = 22$

$a_{12} = ?$

$$a_1 + 2d = 10 \times 1$$

$$a_1 + 5d = 22 \times -1$$

$$a_1 + 2d = 10$$

$$-a_1 - 5d = -22$$

$$-3d = -12$$

$$d = \frac{-12}{-3}$$

$$d = 4$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$a_1 + 2d = 10 \qquad a_{12} = a_1 + 11d$$
$$a_1 + 2(4) = 10 \qquad a_{12} = 2 + 11(4)$$
$$a_1 = 10 - 8 \qquad a_{12} = 46$$
$$a_1 = 2$$

5.3.2.- Medios Aritméticos

Son los términos que están comprendidos entre otros dos, *a* y *b*, en una progresión aritmética.

EJEMPLO

Los medios aritméticos entre 2 y 23 en:
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, son
<u>5 , 8 , 11, 14, 17, 20</u>

Para interpolar medios aritméticos entre otros dos números en una progresión aritmética hay que hallar la diferencia.

EJEMPLO

Interpolar 5 medios aritméticos entre –2 y 16.

$a_1 = -2$
$n = 7$
$a_7 = 16$
$d = ?$

EJEMPLO

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$16 = -2 + 6d$$

$$16 + 2 = 6d$$

$$d = 18/6$$

$$d = 3$$

$$-2\ ,\ \underline{1}\ ,\ \underline{4}\ ,\ \underline{7}\ ,\ \underline{10}\ ,\ \underline{13}\ ,\ 16$$

5.3.3.- Media Aritmética (A)

Si se interpola un solo medio aritmético entre otros dos números, a y b, en una progresión aritmética, se obtiene la media aritmética (A).

La fórmula para hallar la media aritmética de dos números a y b, en una progresión aritmética es:

FORMULA

$$A = \frac{a+b}{2}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Hallar la media aritmética de -8 y 24.

$a = -8$

$b = 24$

$A = ?$

$$A = \frac{a+b}{2}$$

$$A = \frac{-8+24}{2}$$

$$A = \frac{16}{2}$$

$$A = 8$$

2.- Hallar la media aritmética de p y q.

$a = p$

$b = q$

$A = ?$

$$A = \frac{a+b}{2}$$

$$A = \frac{p+q}{2}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

3.- La media aritmética de dos números es 9 y uno de ellos es 12. Halla el otro.

$a = 12$

$b = ?$

$A = 9$

$$9 = \frac{12 + b}{2}$$

$$2 \times 9 = 12 + b$$

$$18 = 12 + b$$

$$b = 18 - 12$$

$$b = 6$$

4.- Hallar la suma de los primeros n enteros positivos impares. 1, 3, 5, 7, ...

$a_1 = 1$

$d = 3 - 1 = 2$

$n = n$

$S_n = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\ d\right]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2(1) + (n-1)\ (2)\right]$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$S_n = \frac{n}{2}\left[\cancel{2} + 2n - \cancel{2}\right]$$

$$S_n = \frac{n}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}n\right)$$

$$S_n = n^2$$

Para expresar que tres números están en progresión aritmética, se representan de la siguiente manera:

$$x - d,\ x,\ x + d$$

Ejercicio

EJEMPLO

La suma de tres números en progresión aritmética es 24, y el producto del primero y el tercero es 55. Hallar los números.

$$x - \cancel{d} + x + x + \cancel{d} = 24$$

$$3x = 24$$

$$x = \frac{24}{3}$$

$$x = 8$$

Ejercicio

EJEMPLO

$$(x-d)(x+d)=55$$

$$x^2-d^2=55$$

$$8^2-d^2=55$$

$$-d^2=55-64$$

$$-d^2=-9$$

$$d^2=9$$

$$d=\sqrt{9}$$

$$d=3$$

$$x-d=8-3=5$$

$$x+d=8+3=11$$

$$5,\ \underline{\ 8\ },\ 11$$

Ejercicio # 1. Unidad No. 5

I.- Determinar cuáles de las siguientes sucesiones forman una progresión aritmética. Explique.

1.- 2, 6, 10, 14, 18, ... ,

2.- 12, 10, 10, 8, 6, ... ,

3.- 8, 13, 17, 22, ... ,

4.- 9, 6, 3, 1, –2, –5, ... ,

5.- $2x - 1$, $5x + 1$, $8x + 3$, ... ,

6.- $4x$, $4x + 1$, $6x - 2$, ... ,

7.- –7, –5, –3, –1, ... ,

8.- $2a$, $2a + 3$, $2a + 6$, ... ,

9.- $4x - 1$, $x + 2$, $4x$, ... ,

10.- $5x - 3$, x, $10x - 6$, ... ,

II.- Formar 5 progresiones aritméticas cuya diferencia sea 3; y 5 cuya razón sea –3.

III.- Hallar

1.- El 5to. término de –3, 1, 5,9, ... ,

2.- El término 16 en 7, 5, 3, 1, –1, ... ,

3.- El término 12 de 3, 6, 9, ... ,

4.- El valor de x para que $2x$, $3x + 5$, $10x - 2$ formen una progresión aritmética.

5.- El valor de x para que $-2x + 4$, $x + 8$, $x + 6$, formen una progresión aritmética.

IV.- **El 4to. término de una progresión aritmética es 2 y el 8vo. es 6. Hallar el término 11 y su suma.**

V.- **El 3er. término de una progresión aritmética es 8 y el 7mo. es 70. Hallar el término 15 y su suma.**

VI.- **Si:**

$$a_1 = 5$$
$$d = 3$$
$$n = 15$$

Hallar: a_7 y S_{15}

VII.- Una progresión aritmética tiene los siguientes elementos: a_1, d, n, a_n, y S_n.

Hallar:

1.- a_n en función de a_1,n y S_n.

2.- a_1 en función de d, n, S_n.

3.- n en función de a_n, a_1

4.- d en función de a_n, a_1 y n.

VIII.- Hallar :

1.- a_1, si $a_8 = 25$; $d = 3$

2.- S_n, si $a_1 = 3$, $d = 2$, $n = 7$

IX.- Interpolar:

1.- 5 medios aritméticos entre 9 y 27.

2.- 4 medios aritméticos entre -6 y 34.

3.- 7 medios aritméticos entre 2/3 y 25/6 .

4.- 6 medios aritméticos entre 4 y -17.

5.- 5 medios aritméticos entre -5 y 7.

X.- Hallar la suma de:

1.- Los primeros n números enteros positivos:

a.- Los primeros n números enteros positivos impares.

b.- Los primeros n números enteros positivos pares.

XI.- La suma de:

1.- Los 6 primeros términos de una progresión aritmética es 48 y la suma de los 8 primeros términos es 80. Hallar la suma de los primeros 15.

2.- Los 9 primeros términos de una progresión aritmética es –90 y la suma de los 13 primeros es –208. Hallar la suma de los 17 primeros términos.

XII.- Hallar:

1.- La media aritmética de –8 y 24.

2.- La media aritmética de 15 y −19.

3.- La media aritmética de m y n.

4.- La media aritmética de $x + y$ y $x - y$.

XIII.- La media aritmética de dos números es:

1.- 25 y uno de ellos es 17. Hallar el otro.

2.- 107/2 y uno de ellos es 24. Hallar el otro.

3.- 6 y uno de ellos es 5 veces el otro. Hallar los números.

XIV.- Demostrar que : $a_n = a_1 + (n - 1) d$

XV.- La suma de 3 números en progresión aritmética es:

1.- 27 y el producto del 1ro. por el 2do. es 54. Hallar los números.

2.- 270 y el producto del 1ro. y el 3ro. es 6500. Hallar los números.

5.4.- Progresión Armónica

Una progresión armónica es una sucesión de números cuyos recíprocos forman una progresión aritmética.

EJEMPLO

La sucesión 1/3, 1/6, 1/9, ... , 1/3 n , es una progresión armónica ya que sus recíprocos: 3, 6, 9, ... , 3n , ... , forman una progresión aritmética.

Para resolver problemas de progresiones armónicas, se debe tomar en cuenta la progresión aritmética correspondiente.

Para hallar el término enésimo o la suma de los n primeros términos de una progresión armónica, no existen fórmulas.

EJEMPLO

El segundo término de una progresión armónica es 1/4 y el 9no. término es 1/18. Hallar el 6to. término.

$a_2 = 1/4$

$a_9 = 1/18$ Progresión armónica

$a_6 = ?$

EJEMPLO

$a_2 = 4$

$a_9 = 18$ Progresión aritmética

$a_6 = ?$

$$
\begin{array}{l}
a_2 = a_1 + d = 4 \times 1 \\
a_9 = a_1 + 8d = 18 \times -1 \\
\hline
a_1 + d = 4 \\
-a_1 - 8d = -18 \\
\hline
-7d = -14 \\
d = -14/-7 \\
d = 2
\end{array}
$$

$a_1 + d = 4$

$a_1 + 2 = 4$

$a_1 = 4 - 2$

$a_1 = 2$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_6 = 2 + 5\ (2)$

$a_6 = 12$

$\underline{a_6 = 1/12}$

5.4.1.- Medios Armónicos

Son los términos comprendidos entre otros dos *a* y *b* en una progresión armónica.

Ejercicio

EJEMPLO

Interpolar 4 medios armónicos entre 1/7 y –1/3

$a_1 = 1/7$

$n = 6$ Progresión armónica

$a_6 = -1/3$

$a_1 = 7$

$n = 6$ Progresión aritmética.

$a_6 = -3$

$d = ?$

$$a_6 = a_1 + 5d$$

$$-3 = 7 + 5d$$

$$-5d = 7 + 3$$

$$d = 10/-5$$

$$d = -2$$

$$7,\ 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3$$

Resp. $1/7\ ,\ \underline{1/5}\ ,\ \underline{1/3}\ ,\ \underline{1}\ ,\ \underline{-1}\ ,\ -1/3$

5.4.2.- Media Armónica (H)

Si se interpola un solo medio armónico entre otros dos términos *a* y *b* en una progresión armónica, se obtiene su media armónica (**H**).

Para hallar la media armónica (**H**) de dos números *a* y *b* en una progresión armónica se utiliza la siguiente fórmula.

FORMULA

$$H = \frac{2\ a\ b}{a + b}$$

La media armónica de dos números *a* y *b* no es igual al recíproco de su media aritmética.

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Hallar la media armónica de 5 y 11.

$a = 5$

$b = 11$

$H = ?$

$$H = \frac{2\ a\ b}{a + b}$$

$$H = \frac{2\ (5)\ (11)}{5 + 11}$$

$$H = \frac{110}{16}$$

$$H = \frac{55}{8}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- **Calcular la media armónica de m+ n y m − n.**

$a = m + n$

$b = m - n$ $\qquad H = \dfrac{2\ a\ b}{a + b}$

$H = ?$

$$H = \frac{2\ (m + n)\ (m - n)}{m + n + (m - n)}$$

$$H = \frac{2\ (m^2 - n^2)}{2m}$$

$$H = \frac{m^2 - n^2}{m}$$

3.- **La media aritmética de dos números es 5 y la media armónica 24/5. Hallar los números.**

$A = 5$

$H = 24/5$ $\qquad A = \dfrac{a + b}{2}$

$$5 = \frac{a + b}{2}$$

$$2 \times 5 = a + b$$

$$10 = a + b$$

$$a = 10 - b$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$H = \frac{2\,a\,b}{a+b}$$

$$\frac{24}{5} = \frac{2\,a\,b}{a+b}$$

$$\begin{aligned}
24\,(a + b) &= 5(2ab)\\
24a + 24b &= 10ab\\
24(10 - b) + 24b &= 10(10 - b)b\\
240 - 24b + 24b &= 100b - 10b^2\\
240 &= 100b - 10b^2\\
10b^2 - 100b + 240 &= 0\\
b^2 - 10b + 24 &= 0\\
(b - 4)\,(b - 6) &= 0\\
b - 4 &= 0\\
b &= 4\\
b - 6 &= 0\\
b &= 6
\end{aligned}$$

Resp. 4 y 6

Ejercicios

EJEMPLOS

4.- La media aritmética de dcs números es 8 y su media armónica es 15/2. Hallar los números.

$A = 8$

$H = 15/2$

$$A = \frac{a+b}{2}$$

$$8 = \frac{a+b}{2}$$

$$2 \times 8 = a + b$$

$$16 = a + b$$

$$a = 16 - b$$

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\frac{15}{2} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$15\ (a + b) = 2\ (2\ a\ b)$$

$$15a + 15b = 4ab$$

$$15\ (16 - b) + 15b = 4\ (16 - b)\ b$$

$$240 - 15b + 15b = 64b - 4b^2$$

$$240 = 64b - 4b^2$$

$$4b^2 + 240 - 64b = 0$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$b^2 - 16b + 60 = 0$$

$$(b - 6)(b - 10) = 0$$

$$b - 6 = 0$$

$$\mathbf{b = 6}$$

$$\mathbf{b - 10 = 0}$$

$$\mathbf{b = 10}$$

Resp. 6 y 10

Ejercicio # 2. Unidad No. 5

I.- Hallar el:

1.- 8vo. término de la siguiente progresión armónica:

$$-\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \ldots,$$

2.- Término 12 de la progresión armónica:

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \ldots,$$

II.- La media aritmética de dos números es 6 y su media armónica es 9/2 , hallar los números.

III- La media armónica de dos números es 15/4 y uno de ellos es 5, hallar el otro.

IV.- La media armónica de dos números es 1/9 y uno de ellos es 1/3. hallar el otro.

V.- ¿Qué valor debe tener x para que $\frac{1}{2x}$, $\frac{1}{3x+2}$, $\frac{1}{5x+1}$, formen una progresión armónica.

VI.- Hallar la media armónica de:

1.- 8 y 12

2.- -5 y 15

3.- p y q

4.- $p + q$ y $p - q$

5.- -9 y -16

VII.- El 4to. término de una progresión armónica es 1/9 y el 8vo. término es 1/21, hallar el término 15.

VIII.- El 4to. término de una progresión armónica es 1/14 y el 7mo. término es 1/26, hallar el 10.

IX.- Hallar la suma de los 8 primeros términos de la progresión armónica 1/3, 2/3, – 5/3, ... ,

X.- Interpolar:

1.- 4 medios armónicos entre 1/2 y 1/27.

2.- 8 medios armónicos entre –1/5 y 1/13.

3.- 4 medios armónicos entre 1/4 y 1/19.

4.- 3 medios armónicos entre 1/5 y –1/3.

5.- 6 medios armónicos entre –1/5 y 1/9

5.5.- Progresión Geométrica

Una progresión geométrica es una sucesión de números, de tal manera que después del primero.

cualquier término se obtiene multiplicando al anterior por un número fijo llamado razón de la progresión *(r)*. Esta *r* debe ser distinta de *0*.

Cuando se conocen dos términos consecutivos de una progresión geométrica, la razón se obtiene dividiendo el posterior entre el anterior.

EJEMPLO

3, 6, 12, 24, ..., es una progresión geométrica

$$r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2$$

5.5.1.- Elementos de una Progresión Geométrica

a_1 = ler. término

r = razón

n = número de términos

a_n = último término

S_n = suma de los n primeros términos

Fórmula para hallar el último término de una progresión geométrica.

FÓRMULA

Sea la progresión geométrica:

$$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \dots ,$$

$a_n = a_1r^{n-1}$

$a_6 = a_1r^5$

$a_9 = a_1r^8$

Fórmula para hallar la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

FÓRMULA

1.- Cuando no se conoce el último término:

$$s_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}; \quad r \neq 1$$

FÓRMULA

2.- Cuando se conoce el último término:

$$s_n = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r}; \quad r \neq 1$$

Ejercicio

EJEMPLO

Sea la progresión geométrica 1, 3, 9, ... ,. Hallar el 8vo. término y la suma de los 8 primeros términos.

$a_1 = 1$

$r = 3$

$n = 8$

$a_8 = ?$

$S_8 = ?$

$$a_8 = a_1 \times r^{n-1}$$

$$a_8 = 1 \times 3^7$$

$$a_8 = 2187$$

$$s_8 = \frac{a_1 - ra_8}{1 - r}$$

$$s_8 = \frac{1 - 3(2187)}{1 - 3}$$

$$s_8 = \frac{1 - 6561}{-2}$$

$$s_8 = \frac{-6560}{-2}$$

$$\underline{s_8 = 3280}$$

5.5.2.- Medios Geométricos

Son los términos comprendidos entre otros dos *a* y *b*, en una progresión geométrica.

Para interpolar medios geométricos se debe hallar la razón.

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Interpolar 4 medios geométricos entre 1/2 y 1/64.

$a_1 = 1/2$

$n = 6$

$a_6 = 1/64$ $\qquad$ $a_6 = a_1\, r^5$

$S_8 = ?$ $\qquad$ $1/64 = 1/2\ r^5$

$$\frac{1}{64} \div \frac{1}{2} = r^5$$

$$\frac{1}{32} = r^5$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{r^5}$$

$$\frac{1}{2} = r$$

Resp. 1/2 , <u>1/4 , 1/8 , 1/16 , 1/32</u> , 1/64

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- Interpolar 5 medios geométricos entre 8 y 1/8.

$a_1 = 8$

$n = 7$

$a_7 = 1/8$

$r = ?$

$$a_7 = a_1 r^6$$

$$\frac{1}{8} = 8r^6$$

$$\frac{1}{8} \div 8 = r^6$$

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = r^6$$

$$\frac{1}{64} = r^6$$

$$\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \sqrt[6]{r^6}$$

$$\frac{1}{2} = r$$

Resp. 8 , <u>4</u> , <u>2</u> , <u>1/2</u> , <u>1/4</u> , 1/8

5.5.3.- Media Geométrica (G)

Si se interpola un solo medio geométrico entre otros dos números a y b en una progresión geométrica, se obtiene su media geométrica.

Fórmula para hallar la media geométrica de dos números a y b.

FÓRMULA

$$G = \pm\sqrt{a.b}$$

Los signos de a y b deben ser iguales, y el signo de G debe ser el común de a y b.

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Hallar la media geométrica entre 4 y 36.

a = 4

b = 36

G = ?

$$G = \pm\sqrt{4 \times 36}$$

$$G = \pm\sqrt{144}$$

$$G = 12$$

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- Hallar la media geométrica entre –4 y –36.

$a = -4$

$b = -36$

$G = ?$

$$G = \pm\sqrt{-4 \times -36}$$

$$G = \pm\sqrt{144}$$

$$G = -12$$

Ejercicios

EJEMPLOS

I.- Determinar cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas.

a.- 2, 6, 18, 54, ... ,

$$6 \div 2 = 3\ ;\ \ 54 \div 18 = 3\ ;\ \ 18 \div 6 = 3$$

Es una progresión geométrica.

Ejercicios

EJEMPLOS

b.- 1, 1/2, 1/6, 1/8, ... ,

$$\frac{1}{2} \div 1 = 0.5 \div 1 = 0.5$$

$$\frac{1}{8} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{8} \times 6 = \frac{3}{4} = 0.75$$

No es una progresión geométrica

II.- Hallar el valor de x para que la sucesión 2x – 5, x – 4, 10 – 3x, ... , sea una progresión geométrica.

$$\frac{x-4}{2x-5} = \frac{10-3x}{x-4}$$

$$(x-4)^2 = (10-3x)(2x-5)$$

$$x^2 - 8x + 16 = 20x - 50 - 6x^2 + 15x$$

$$50 + x^2 + 6x^2 - 8x - 35x + 16 = 0$$

$$7x^2 - 43x + 66 = 0$$

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{(3)^2\ 4(7)(66)}}{2(7)}$$

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{1849 - 1848}}{14}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{1}}{14}$$

$$x = \frac{43 + 1}{14} = \frac{44}{14} = \frac{22}{7}$$

$$x_2 = \frac{43 - 1}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

III.- Hallar la media geométrica de m^2 y n^2.

$a = m^2$

$b = n^2$

$G = ?$

$$G = \pm\sqrt{m^2 n^2}$$

$$G = mn$$

IV.- La media geométrica de dos números positivos es 8 y uno de ellos es 16 veces el otro. Hallar los números.

$a = x$

$b = 16x$

$G = 8$

$a = ?$

$b = ?$

$$G = \pm\sqrt{ab}$$

$$G = \pm\sqrt{x.16x}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$8 = \sqrt{16x^2}$$

$$8 = 4x$$

$$\frac{8}{4} = x$$

$$2 = x$$

Resp. $x = 2$; $16x = 32$

V.- El tercer término de una progresión geométrica es 1/2 y el 7mo. término es 1/32. Hallar la razón y el primer término.

$a_3 = 1/2$

$a_7 = 1/32$

$r = ?$

$a_1 = ?$

$$a_1 r^6 = \frac{1}{32}$$

$$a_1 r^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1 r^6}{a_1 r^2} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}}$$

$$r^4 = \frac{1}{32} \times 2$$

$$r^4 = \frac{1}{16}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$\sqrt[4]{r^4} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$a_1 r^2 = 1/2$$

$$a_1 (1/2)^2 = 1/2$$

$$a_1 (1/4) = 1/2$$

$$a_1 = 1/2 \div 1/4$$

$$a_1 = 1/2 \times 4$$

$$a_1 = 2$$

VI.- La media armónica de dos números es 24/5 y su media geométrica es 6. Hallar los números.

$$H = \frac{24}{5} \qquad H = \frac{2ab}{a+b}$$

$G = 6$

$a = ?$

$b = ?$

$$\frac{24}{5} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$24(a+b) = 10\,ab$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$G=\sqrt{a\ .\ b}$$

$$6=\sqrt{a\ .\ b}$$

$$36=a\ .\ b$$

$$a=\frac{36}{b}$$

$$24\left(\frac{36}{b}\right)+24\,b=10\left(\frac{36}{\cancel{b}}\right)\cancel{b}$$

$$\frac{864}{b}+\frac{24\,b}{1}=\frac{360}{1}$$

$$864b+24b^2=360b$$

$$24b^2-360b+864=0$$

$$b^2-15b+36=0$$

$$(b-12)\,(b-3)=0$$

$$b=12$$

$$b=3$$

Resp. 12 y 3

Ejercicios

EJEMPLOS

VII.- La media aritmética de dos números positivos diferentes es 20 y su media geométrica es 12. Hallar los números.

$A = 20 \qquad A = \dfrac{a+b}{2}$

$G = 12$

$$20 = \frac{a+b}{2}$$

$$2(20) = a+b$$

$$40 = a+b$$

$$a = 40 - b$$

$$G = \sqrt{a\ .\ b}$$

$$12 = \sqrt{a\ .\ b}$$

$$144 = a\ .\ b$$

$$144 = (40-b)\ b$$

$$144 = 40b - b^2$$

$$b^2 - 40b + 144 = 0$$

$$(b - 36)\ (b - 4) = 0$$

$$b = 36$$

$$b = 4$$

Resp. 36 y 4

Ejercicios

EJEMPLOS

VIII.-Hoy lro. de julio voy a depositar 0.02 y cada día voy a depositar el doble de lo que deposité el día anterior. ¿Cuánto tendré depositado el día 15 de julio?

$a_1 = 0.02$

$r = 2$

$n = 15$

$s_{15} = ?$

$$s_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

$$s_{15} = \frac{0.02 - 0.02(2)^{15}}{1-2}$$

$$s_{15} = \frac{0.02 - 0.02 \times 32768}{-1}$$

$$s_{15} = \frac{0.02 - 655.36}{-1}$$

$$s_{15} = \frac{-655.34}{-1}$$

$$= 655.34$$

Ejercicios

EJEMPLOS

IX.- Hallar el 8vo. término y la suma de los 8 primeros términos de la progresión geométrica 4, 12, 36, ... ,

$a_1 = 4$

$r = 12/4 = 3$

$n = 8$

$a_8 = ?$

$s_8 = ?$

$$a_8 = a_1 \times r^{n-1}$$

$$a_8 = 4 \times 3^7$$

$$a_8 = 4 \times 2187$$

$$a_8 = 8748$$

$$s_8 = \frac{a_1 - ra_8}{1-r}$$

$$s_8 = \frac{4-3(8748)}{1-3}$$

$$s_8 = \frac{4-26244}{-2}$$

$$s_8 = \frac{-26240}{-2}$$

$$s_8 = 13{,}120$$

Resp. $a_8 = 8748$; $s_8 = 13{,}120$

Ejercicios

EJEMPLOS

X.- El tercer término de una progresión geométrica es 36 y el 5to. es 16. Hallar el décimo.

$a_3 = 36$

$a_5 = 16$

$a_{10} = ?$

$r = ?$

$$a_5 \quad a_1 r^4 = 16$$

$$a_3 \quad a_1 r^2 = 36$$

$$\frac{a_1 r^4}{a_1 r^2} = \frac{16}{36}$$

$$r^2 = \frac{16}{36}$$

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{\frac{16}{36}}$$

$$r = \frac{2}{3}$$

$$a_1 r^2 = 36$$

$$a_1 \, (2/3)^2 = 36$$

$$a_1 \, (4/9) = 36$$

$$a_1 = 36 \times 9/4$$

$$a_1 = 81$$

$$a_{10} = a_1 r^9$$

$$a_{10} = 81 \, (2/3)^9$$

$$a_{10} = 81 \, (512/19683)$$

$$a_{10} = 512/243$$

5.6.- Progresiones Geométricas Infinitas

La fórmula para hallar la suma de los términos de una progresión geométrica infinita es la siguiente:

FÓRMULA

$$s_\infty = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-r} : /r/ < 1 ; -1 < x < 1$$

a_1 = 1er. término

n = el número de términos

r = razón

La progresión es convergente para los valores de r tales que:

$$/r/ < 1 \to -1 < r < 1$$

La serie divergente para todos los demás valores de r.

EJEMPLO

Determinar si la siguiente serie es convergente

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ \dots \ +$$

$$r = \frac{2}{3} \div 1 = \frac{2}{3}$$

$$r = \frac{2}{3} ; \ \left|\frac{2}{3}\right| < 1$$

Sí es convergente

Las fracciones decimales periódicas son ejemplos de progresiones geométricas infinitas.

Las fracciones decimales periódicas tienen un número infinito de cifras que de cierto lugar en adelante se repiten periódicamente. Estas cifras que se repiten se le llama período.

EJEMPLO

$$0.666\ldots = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \ldots$$

$$3.212121\ \ldots = 3 + \frac{21}{10^2} + \frac{21}{10^4} + \frac{21}{10^6}$$

0.6	3.
0.06	0.21
0.006	0.0021
...	0.000021
...	......
...	......
0.0006	......
0.6666...	3. 212121...

Estas fracciones decimales periódicas se pueden representar de las siguientes maneras:

$$0.6666\ \ldots\ = 0.\dot{6} = 0.\overline{6}$$

$$3.212121\ \ldots\ = 3.\dot{2}\dot{1} = 3.\overline{21}$$

Toda fracción decimal periódica representa un número fraccionario (fracción común).

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Hallar la fracción común equivalente a la fracción decimal periódica $2.8\dot{3}$

Se separan las cifras que no se repiten.

$$\begin{array}{l} 2.8\dot{3} \\ \underline{2.8} \\ 0.0\dot{3} \end{array}$$

$$0.0\dot{3} = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots$$

$$a_1 = \frac{3}{10^2} = 0.03$$

$$r = \frac{3}{10^3} \div \frac{3}{10^2} = \frac{3}{10^3} \times \frac{10^2}{3} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.03}{1-0.1} = \frac{0.03}{0.9} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

$$2.8\dot{3} = 2.8 + \frac{1}{30} = \frac{28}{10} + \frac{1}{30} = \frac{84+1}{30} = \frac{85}{30} = \frac{17}{6}$$

Resp. $\frac{17}{6}$

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- Hallar la suma de los términos de la progresión geométrica infinita dada.

$$12\,,\ 4,\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{9},\dots,$$

$a_1 = 12$

$$r = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{12}{1-\frac{1}{3}} = \frac{12}{\frac{2}{3}} = \frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{1}\times\frac{3}{\cancel{2}} = 18$$

Resp. 18

3.- Hallar la suma de los términos de la progresión geométrica infinita

$$\mathbf{25,\ -20,\ 16,\ \dots\ ,}$$

$a_1 = 25$

$$r = \frac{-20}{25} = -\frac{4}{5}$$

$$s_\infty = \frac{25}{1+\frac{4}{5}} = \frac{25}{\frac{5+4}{5}} = \frac{25}{\frac{9}{5}} = \frac{25}{1}\times\frac{5}{9} = \frac{125}{9}$$

Resp. $\frac{125}{9}$

Ejercicios

EJEMPLOS

4.- Hallar la fracción común equivalente a la fracción decimal periódica siguiente y comprueba el resultado.

$$0.\overline{35} = \frac{35}{10^2} + \frac{35}{10^4} + \frac{35}{10^6} + \ldots +$$

$$a_1 = \frac{35}{10^2}$$

$$r = \frac{35}{10^4} \div \frac{35}{10^2} = \frac{\cancel{35}}{1\cancel{0}^4} \times \frac{10^2}{\cancel{35}} = \frac{1}{10^2} = 0.01$$

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.35}{1-0.01} = \frac{0.35}{0.99} = \frac{35}{99}$$

Resp. $\frac{35}{99}$

5.- Se deja caer una bola desde 78 mts. de altura. Si ésta cada vez que toca tierra rebota 2/3 de lo que ha caído la última vez. Hallar la distancia total recorrida por la bola.

Para los descensos

$$a_1 = 78$$

$$r = \frac{2}{3}$$

Para los ascensos

$$a_1 = \frac{\overset{26}{\cancel{78}}}{1} \times \frac{2}{\cancel{3}} = 52$$

$$r = \frac{2}{3}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

La distancia total recorrida será igual a la suma de estas dos progresiones infinitas.

Para los descensos

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{78}{1-\frac{2}{3}} = \frac{78}{\frac{1}{3}} = 78 \times 3 = 234$$

Para los ascensos

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{52}{1-\frac{2}{3}} = \frac{52}{\frac{1}{3}} = 52 \times 3 = 156$$

Distancia total recorrida

$$234 + 156 = 390$$

Resp. 390

Ejercicios

EJEMPLOS

6.- **Se deja caer una pelota de 102 mts. de altura y esta rebota 2/3 de lo que ha caído la última vez. Hallar la distancia total recorrida por la pelota.**

Para los descensos

$$a_1 = 102$$

$$r = \frac{2}{3}$$

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{102}{1-\frac{2}{3}} = \frac{102}{1} \times \frac{3}{1} = 306$$

Para los ascensos

$$a_1 = \frac{102}{1} \times \frac{2}{3} = 68$$

$$r = \frac{2}{3}$$

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{68}{1-\frac{2}{3}} = \frac{68}{\frac{1}{3}} = 204$$

Resp. 306 + 204 510

Ejercicios

EJEMPLOS

7.- Hallar la fracción común equivalente a la fracción decimal periódica $3.\overline{201}$

$$0.\overline{201} = 3 + \frac{201}{10^3} + \frac{201}{10^6} + \frac{210}{10^9} + \ldots$$

$$r = \frac{201}{10^6} \div \frac{201}{10^3} = \frac{210}{10^6} \times \frac{10}{201} = \frac{1}{10^3} = 0.001$$

$$a_1 = \frac{201}{10^3} = 0.201$$

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.201}{1-0.001} = \frac{0.201}{0.999} = \frac{201}{999} = \frac{67}{333}$$

$$3.201 = 3 + \frac{67}{333} = \frac{1{,}066}{333}$$

8.- **Una pelota se deja caer de una altura de 12 mts. y cada vez que ésta toca el piso, rebota una 1/4 parte de lo que ha caido la última vez. Hallar la distancia total recorrida**

– Descensos

$$a_1 = 12$$

$$r = \frac{1}{4} \qquad s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{12}{1-\frac{1}{4}} = \frac{12}{\frac{3}{4}} = 12 \times \frac{4}{3} = 16$$

Ejercicios

EJEMPLOS

– **Ascensos**

$$a_1 = 12 \times \frac{1}{4} = 3$$

$$r = \frac{1}{4}$$

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

Resp. 16 + 4 = <u>20 mts.</u>

Ejercicio # 3. Unidad No. 5

I.- **Determinar cuáles de las progresiones siguientes son geométricas.**

1.- 2, 4, 8, 16, 32, ...,

2.- 4, 2, 1, 1/4, 1/2, ... ,

3.- x + 1, 2x + 2, 4x + 4, ... ,

4.- 6, 12, 24, 48, ... ,

II.- Hallar el:

1.- 8vo. término de 4, 2, 1, 1/2, ...

2.- 12vo. término de 3, 6, 12, ...

3.- 9no. término de 2, 6, 18, ...

4.- 10mo. término de 1/4, 1/2, 1, 2, ...

III.- Hallar la suma de:

1.- Los 7 primeros términos de 4, 8, 16, ... ,

2.- Los 8 primeros términos de 2, 6, 18, ... ,

IV.- Hallar la media geométrica de:

1.- 4 y 16

2.- 9 y 4

3.- 12 y 3

4.- 8 y 2

5.- 4a y a

6.- 20 y 5

7.- -2 y 50

8.- -2 y -50

V.- La media geométrica de dos números es 6 y uno de ellos 12, hallar el otro.

VI.- La media geométrica de dos números es 4 y uno de ellos 2, hallar el otro.

VII.- La media geométrica de dos números es 10 y uno de ellos es 4 veces el otro, hallar los números.

VIII.- Hallar el valor de x para que $3x$, $4x + 4$ y $10x + 4$ formen una progresión geométrica.

IX.- Hallar la media geométrica de:

1.- p^2 y q^2
2.- x^2 y y^2

X.- La media aritmética de dos números es 13/2 y su media geométrica es 6, hallar los números.

XI.- La media geométrica de dos números es 6 y su media armónica es 72/13, hallar los números.

XII.- Interpolar:

1.- 4 medios geométricos entre 2 y 1/16

2.- 3 medios geométricos entre 2 y 162.

3.- 4 medios geométricos entre 1/3 y 32/3

4.- 4 medios geométricos entre 1/2 y 1/486

XIII.- El 3er. término de una progresión geométrica es 1/2 y el 7mo. es 1/32, hallar el lro. y el de lugar 10.

XIV.- El 2do. término de una progresión geométrica es 1/2 y el 8vo. es 32, hallar el lro. y el término 12.

Ejercicio # 4. Unidad No. 5

I.- Hallar la suma de los términos de la progresión geométrica infinita.

1.- 15, 5, 5/3, ... ,

2.- 30, 20, 40/3, ... ,

3.- 0.4 , 0.04, 0.004, ... ,

4.- 12, 9, 27/4, ... ,

5.- 25, 5, 1/5, ... ,

6.- 24, 4, 2/3, ... ,

7.- 1, 1/3, 1/9, ... ,

8.- 3/4, 3/8, 3/16, ... ,

9.- 5/4, 5/6, 5/9, ... ,

10.-0.5, 0.05, 0.005, ... ,

II.- Hallar la fracción común equivalente a la fracción decimal periódica siguiente y comprueba el resultado.

1.- $0.\dot{1}\dot{2}\dot{5}$

2.- $2.\dot{3}\dot{7}$

3.- $0.008\dot{3}$

4.- $2.\dot{2}\dot{7}$

5.- $3.\dot{1}\dot{4}$

6.- $2.\dot{0}\dot{8}\dot{2}$

7.- $2.\dot{4}\dot{2}$

8.- $1.\dot{1}\dot{7}$

9.- $4.\dot{0}\dot{5}\dot{4}\dot{1}\dot{2}\dot{1}$

10.-$2.\dot{6}\dot{0}\dot{1}$

III.- Para que valores de x las siguientes series geométricas se pueden sumar.

1.- $\frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} + \ldots$

2.- $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots.$

3.- $2 + 2x + 2x^2 + \ldots$

4.- $1 + (x - 3) + (x - 3)^2 + \ldots +$

5.- $4 + 4(x - 2) + 4(x - 2)^2 + \ldots$

IV.- Si se inscriben infinitos cuadrados dentro de otro, uniendo los puntos medios del cuadrado anterior, si el primer cuadrado tiene 10 cms de lado. Hallar la suma de los perímetros de estos cuadrados.

V.- Un triángulo equilátero tiene 48 cms de perímetro. Halla la suma de perímetros de todos los triángulos formados uniendo los puntos medios de los lados del triángulo.

Ejercicios de Repaso UNIDAD No. 5

I.- Interpolar:

1.- 6 medios aritméticos entre 2/3 y 3.

2.- 5 medios geométricos entre 4 y 1/64.

3.- 4 medios armónicos entre 1/2 y -1/8.

II - El 2do. término de una progresión aritmética es –1 y 7mo. es –21. Hallar a_{11}.

III.- El 3er. término de una progresión geométrica es 2/9 y el 6to. término es 2/243. Hallar el 8vo. término.

IV.- El 4to. término de una progresión armónica es $-1/4$ y el octavo es $-1/16$. Hallar el décimo término.

V.- Hallar x si:

1.- Un número es 9 veces otro y su media geométrica es 12. Hallar los números.

2.- $2x + 1$, $2x$, $x + 1$ están en progresión aritmética. Hallar el valor de x.

3.- x, $x - 1$, $x + 2$ están en progresión armónica. Hallar el valor de x.

VI.- Tres números están en progresión:

1.- Aritmética. Si la suma de ellos es 18 y el producto del 1ero. y el 2do. es 12, Hallar los números.

2.- En progresión geométrica, si el producto de ellos es 512 y la suma del 1ro y el 3ero es 34. Hallar los números.

VII.- Tres números están en progresión aritmética. El 1ro. es la tercera parte del 3ro. Si se aumenta el 2do. en 2 y el 1ro. se aumenta en uno, y el tercero se aumenta en 7, estos números están en progresión geométrica. Hallar los números.

VIII.- Hallar la suma de los primeros n enteros positivos.

IX.- Para qué valores de x tiene suma

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+2)^3}+\ldots$$

X.- Expresar como fracción racional:

1.- $2.\dot{4}\dot{2}\dot{4}\dot{2}$

2.- $0.08\dot{0}\dot{3}$

UNIDAD No. 6

Números Complejos

UNIDAD No. 6

Números Complejos

6.1.- Número Imaginario

Es la raíz de índice par de un número negativo.

EJEMPLO

$$\sqrt{-3}\ ,\ \sqrt[6]{-4}\ ,\ \sqrt[4]{-6}$$

La Unidad Imaginaria es la $\sqrt{-1}$ y se representa por la letra i .

6.1.1.- Potencia de i

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

EJEMPLO

$$i^{23} = \underbrace{iiii}_{i^4} \cdot \underbrace{iiii}_{i^4} \cdot \underbrace{iiii}_{i^4} \cdot \underbrace{iiii}_{i^4} \cdot \underbrace{iii}_{i^3}$$

$$i^{23} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times i^3$$

$$i^{23} = i^3 = -i$$

Ejercicio

EJEMPLO

Calcular

1.- $i^{13} = i$

2.- $i^{12} = i^0 = 1$

3.- $i^{10} = i^2 = -1$

4.- $i^{15} = i^3 = -i$

En el conjunto de los números reales, si $a > 0$ y $b > 0$.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

Esta ley no se cumple para los números imaginarios.

Si $a>0$ y $b>0$; $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a}\,i \,.\, \sqrt{b}\,i$

$$= i^2 \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

Expresar en términos de i

1.- $\sqrt{-2} = \sqrt{2}\ i$

2.- $\sqrt{-4} = 2i$

3.- $\sqrt{-36} = 6i$

4.- $\sqrt{-9} = 3i$

5.- $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\ i$

6.1.2.- Definición:

Todo número de la forma *a+ bi* en donde *a* y *b* son números reales, se le llaman números complejos, *a* es la parte real y *bi* es la parte imaginaria.

6.2.- Números Complejos Iguales:

Dos números complejos $a + bi$ y $c + bi$, son iguales si sus partes reales son iguales entre sí y sus partes imaginarias son iguales entre sí.

EJEMPLO

$$(a + bi) = (c + di)$$

si $a = c$ y $b = d$

Ejercicios

EJEMPLOS

I.- Calcular los valores reales de x e y si:

1.- $x + yi = 3 + 2i$

$x = 3 \qquad y = 2$

2.- $4x - 2yi = 8 - 3i$

$4x = 8 \qquad -2y = -3$

$x = 8/4 \qquad y = -3/-2$

$x = 2 \qquad y = 3/2$

Ejercicios

EJEMPLOS

3.- $x + 3y + (4x - 2y - 6)\,i = 0$

$x + 3y = 0$

$4xi - 2yi - 6i = 0$

$x + 3y = 0$

$4xi - 2yi = 6i$

$$x + 3y = 0 \qquad (2)$$

$$4x - 2y = 6 \qquad (3)$$

$$2x + 6y = 0$$

$$12x - 6y = 18$$

$$14x = 18$$

$$x = 18/14$$

$$x = 9/7$$

$$2\,(9/7) + 6y = 0$$

$$18/7 + 6y = 0$$

$$6y = -18/7$$

$$y = -18/7 \div 6$$

$$y = -18/7 \times 1/6$$

$$y = -3/7$$

La relación de orden no se puede aplicar a los números complejos, es decir, no se puede decir que un número complejo es mayor o menor que otro. Por lo tanto no se le puede asignar un signo a los números complejos.

Existe el negativo de un número complejo: El negativo del número complejo $a + bi$ es $-a - bi$.

Ejercicios

EJEMPLOS

Escribir el negativo de.

1.- $-3i = 3i$

2.- $-4 + i = 4 - i$

3.- $2 - 3i = -2 + 3i$

4.- $-6 - 5i = 6 + 5i$

5.- $2 + 6i = -2 - 6i$

6.3.- Números Complejos Conjugados

Dos números complejos son conjugados cuando sólo difieren en el signo de la parte imaginaria.

El conjugado de $a + bi$ es $a - bi$

Ejercicios

EJEMPLOS

Escribir el conjudado de.

1.- $-4-2i=-4+2i$

2.- $-6i = 6i$

3.- $4i = -4i$

4.- $2 - 6i = 2 + 6i$

5.- $6 + 5i = 6 - 5i$

6.- $-3 + 2i = -3 - 2i$

6.4.- Operaciones Fundamentales con los Números Complejos en Forma Rectangular, Binómica o Canónica. x + yi

6.4.1.- Adición

Para sumar dos números complejos en forma rectangular, se suman las partes reales entre sí, y las partes imaginarias entre sí.

EJEMPLO

1 $(4 + 2i) + (-1 - 6i) = 3 - 4i$

2 $(-3 - 2i) + (5 - 4i) = 2 - 6i$

6.4.2.- Sustracción

Para restar dos números complejos en forma rectangular, se restan las partes reales entre si, y las imaginarias entre sí.

EJEMPLOS

a.- $(2 - 2i) - (2 + 5i) = (4 - 2i) + (-2 - 5i) = 2 - 7i$

b.- $(3 + 4i) - (-1 - i) - (2 - 3i) =$

$(3 + 4i) + (1 + i) + (-2 + 3i) = 2 + 8i$

6.4.3.- Producto

Para multiplicar dos números complejos en forma rectangular, se multiplican como binomios, y teniendo en cuenta las potencias de i.

EJEMPLOS

a.- $(4 + 2i)(3 - 4i)$

$$\begin{array}{r}
4 + 2i \\
3 - 4i \\
\hline
12 + 6i \\
-16i - 8i^2 \\
\hline
12 - 10i - 8i^2
\end{array}$$

$12 - 10i - 8(-1)$

$12 - 10i + 8$

$= 20 - 10i$

EJEMPLOS

b.- $(2i)^2 = 4i^2 = 4\,(-1) = -4$

c.- $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 9 + 12i + 4\,(-1)$

$= 9 + 12i - 4 \quad = 5 + 12i$

6.4.4.- División

Para dividir números complejos en forma rectangular, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

EJEMPLO

$$\frac{2+3i}{4-2i}$$

$$\frac{(2+3i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{8+4i+12i+6i^2}{4^2-(2i)^2}$$

$$= \frac{8+16i+6(-1)}{16-4i^2} = \frac{8+16i-6}{16-4(-1)}$$

$$= \frac{2+16i}{16+4} = \frac{2+16i}{20} = \frac{\cancel{2}(1+8i)}{\cancel{20}}$$

$$= \frac{1+8i}{10}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

I.- **Efectuar la operación indicada y expresar el resultado en forma rectangular.**

1.- $4+3\sqrt{-3}\;-4\left(\sqrt{-2}\;-3\right)+4i-6$

$$4+3\sqrt{3}\,i\;-4\left(\sqrt{2}\,i\;-3\right)+4i-6$$

$$4+3\sqrt{3}\,i\;-4\sqrt{2}\,i+12+4i-6$$

$$10+\left(3\sqrt{3}\;-4\sqrt{2}+4\right)i$$

2.- $(1 + 3i)\,(4 + 12i)\,(3 - 4i)$

$$\begin{array}{r}
1 + 3i \\
4 + 12i \\
\hline
4 + 12i \\
12i + 36i^2 \\
\hline
4 + 24i + 36i^2 \\
4 + 24i - 36 \\
-32 + 24i
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
-32 + 24i \\
3 - 4i \\
\hline
-96 + 72i \\
+128i - 96i^2 \\
\hline
-96 - 56i - 96i^2 \\
-96 - 56i - 96(-1) \\
-96 - 56i + 96 \\
-56i
\end{array}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$3.-\ \frac{3-2i}{1+i}=\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{3-3i-2i+2i^2}{1-i^2}=\frac{3-5i+2(-1)}{1-(-1)}$$

$$=\frac{3-5i-2}{1+1}=\frac{1-5i}{2}$$

6.5.- Representación Rectangular (Gráfica) de Números Complejos

El número complejo $x + yi$, representa gráficamente un punto P de coordenadas rectangulares (x, y).

El eje de las x se llama *eje real.*

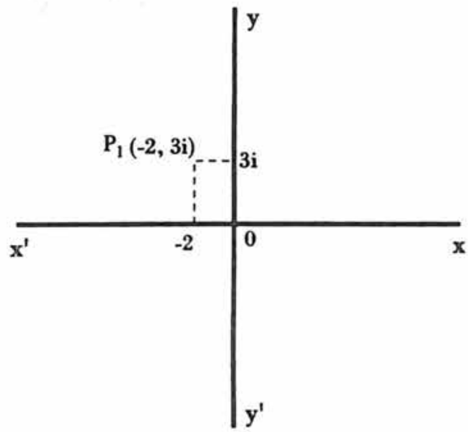
El eje de las y se llama *eje imaginario.*

El plano en que se representan los números complejos es llamado *plano complejo.*

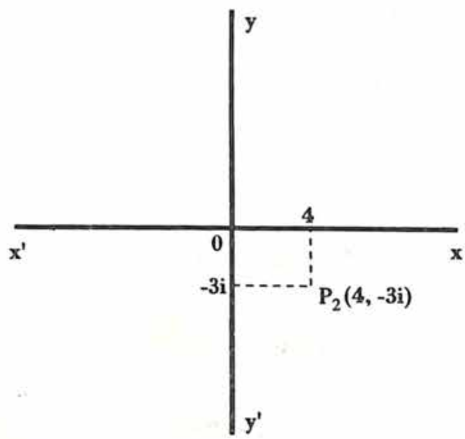
EJEMPLOS

Representar gráficamente los siguientes números complejos:

1.- $P_1 (-2 + 3i)$

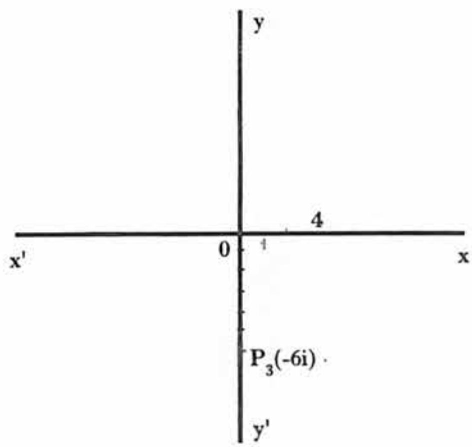


2.- $P_2 (4 - 3i)$

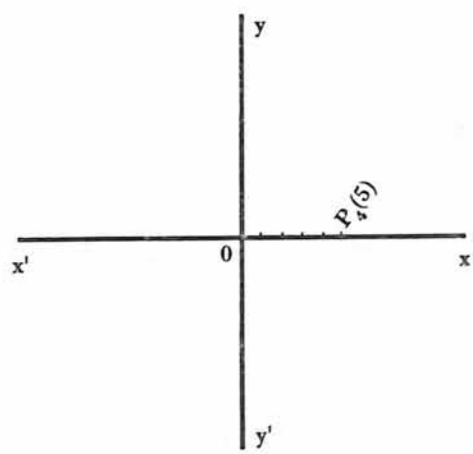


EJEMPLOS

3.- $P_3\ (-6i)$

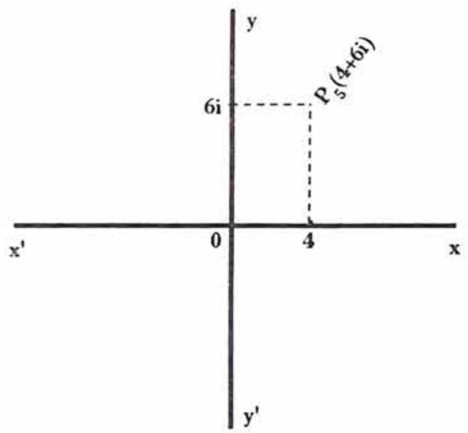


4.- $P_4\ (5)$

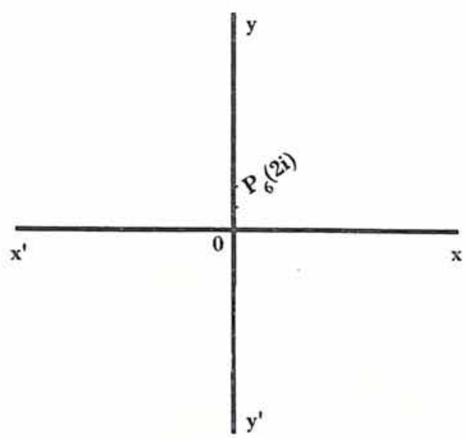


EJEMPLOS

5.- $P_5 (4 + 6i)$

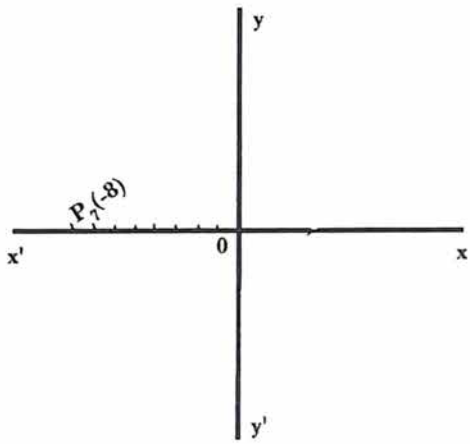


6.- $P_6 (2i)$

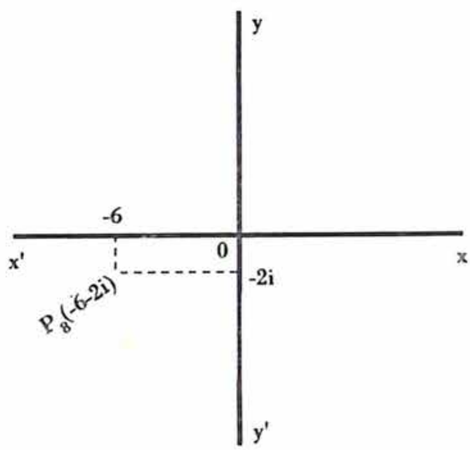


EJEMPLOS

7.- $P_7\,(-8)$

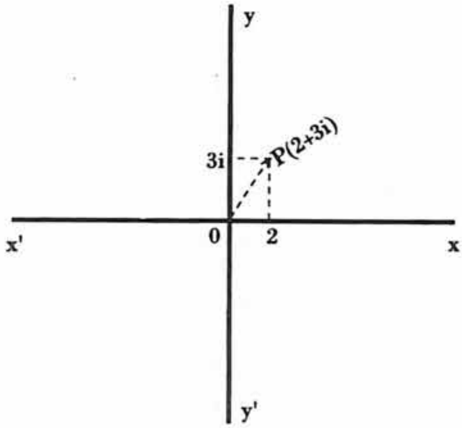


8.- $P_8\,(-6-2i)$



Un número complejo P también se puede representar por un segmento dirigido o vector OP.

$$P\ (2 + 3i) = P\ (2,3)$$

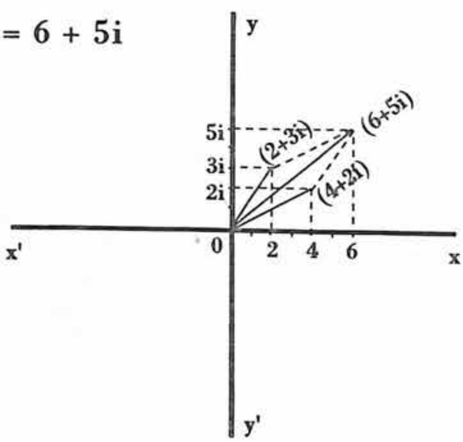


EJEMPLOS

1.- Hallar gráficamente las operaciones siguientes:

$(2 + 3i) + (4 + 2i)$

$$(2 + 3i) + (4 + 2i) = 6 + 5i$$



Ejercicio # 1. Unidad No. 6.

I.- Efectuar las operaciones indicadas

1.- $(-4 + 3i) + (5 - 2i)$

2.- $(-6 - 3i) + (-5 - 2i)$

3.- $(1 + i) + (1 - i)$

4.- $(-5 - 6i) + (8 + 4i)$

5.- $(11 - i) + (13 + 9i)$

6.- $(-4 - 2i) - (6 - 3i)$

7.- $(8 - i) - (8 - i)$

8.- $(6 - 4i) - (-3 - i)$

9.- $(2 - i) - (3 + i)$

10.- $(4 + i) - (2 - i)$

II.- Determinar los valores de x e y que satisfacen la siguiente igualdad.

1.- $6x - 3yi = -18 + 3i$

2.- $4x + 2yi = -8 - 6i$

3.- $8x - 2yi = 4 + 2i$

4.- $(8x + 5y) + (4x - 2y)\,i = 3 + 2i$

5.- $(3x + 2y) + (2x - 4y)\,i = 12 - 8i$

III.- **Efectuar:**

1.- $(2 - 2i)(4 - i)$

2.- $(-5 + i)(-3 - i)$

3.- $(2 + 4i)^2$

4.- $(-3i)^2$

5.- $(1 + i)^3$

6.- $(2 - 2i)^4$

7.- $(5i)^2$

8.- $(1 - i)^4$

9.- $(3 + i)(3 - i)$

10.- $(-1 - i)(-1 - i)$

IV.- **Efectuar**

1.- $\dfrac{4-i}{2+3i}$

2.- $\dfrac{-3-i}{-2-i}$

3.- $\dfrac{4+2i}{1-i}$

4.- $\dfrac{3}{-2i}$

5.- $\dfrac{2+i}{-3i}$

6.- $\dfrac{1+i}{1-i}$

7.- $\dfrac{3+2i}{4-i}$

8.- $\dfrac{2+3i}{2-i}$

9.- $\dfrac{-4}{-1-2i}$

10.- $\dfrac{1+i}{1+i}$

V.- Calcular

1.- i^{13}

2.- i^{22}

3.- i^{31}

4.- i^{28}

5.- i^{19}

6.- i^{41}

7.- i^{70}

8.- i^{25}

9.- i^{35}

10.- i^{44}

VI.- Representa Gráficamente

1.- $-2 - 3i$

2.- $4 - 5i$

3.- $1 + 2i$

4.- $-3 + 6i$

5.- $4 - 8i$

6.- $-3 - 2i$

7.- $-1 - i$

8.- $2 + 2i$

9.- $4 - 2i$

10.- $1 + 5i$

VII.- Exprese en términos de i

1.- $\sqrt{-36}$

2.- $\sqrt{-3}$

3.- $\sqrt{-2}$

4.- $\sqrt{-9}$

5.- $\sqrt{-25}$

6.- $\sqrt{-81}$

7.- $\sqrt{-100}$

8.- $\sqrt{-49}$

9.- $\sqrt{-64}$

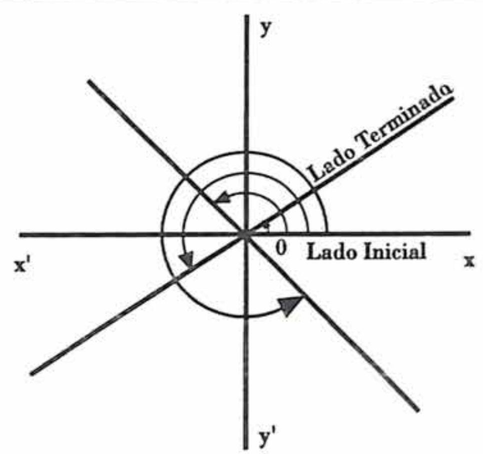
10.- $\sqrt{-5}$

6.6.- Repaso de Trigonometría

6.6.1.- Angulo Dirigido en Posición Normal

Es aquel en que el lado inicial es el sentido positivo del eje de las x y el lado terminal está en cualquier cuadrante.

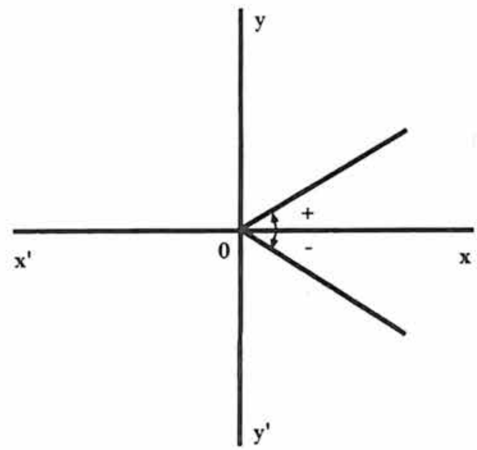
EJEMPLO



Un ángulo es positivo, si se engendra contrario a la manecilla del reloj.

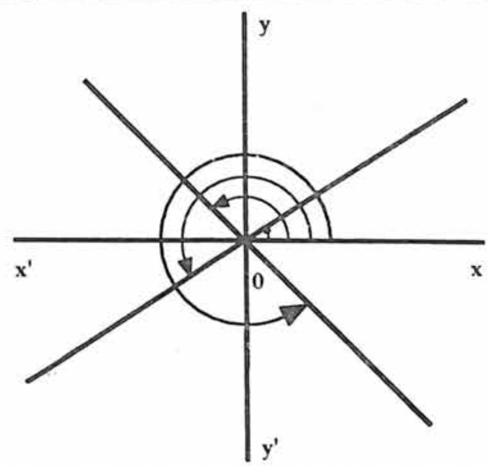
Un ángulo es negativo, si se engendra a favor de las manecillas del reloj.

EJEMPLO



Un ángulo en cada cuadrante es aquel que esta en posicion normal y su lado terminal esta en uno de los cuadrantes.

EJEMPLO

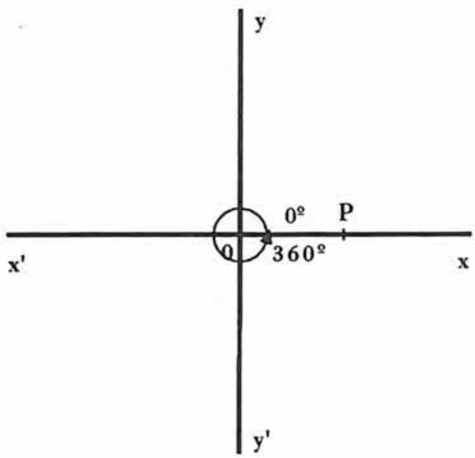


6.6.2.- Angulo Cuadrantal

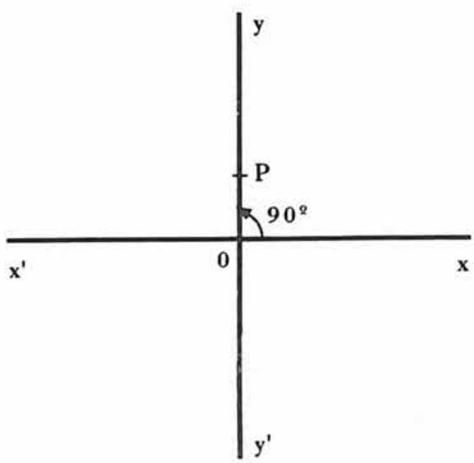
Es aquel que está en posición normal y su lado terminal está en uno de los ejes.

EJEMPLOS

1.-

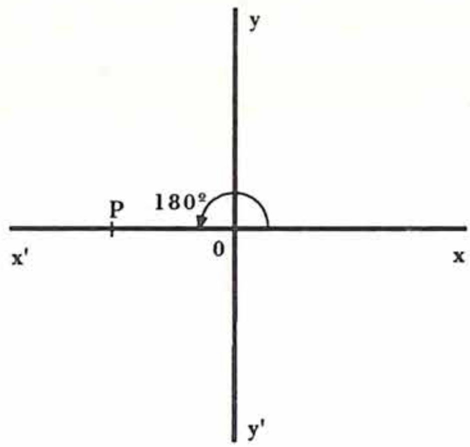


2.-

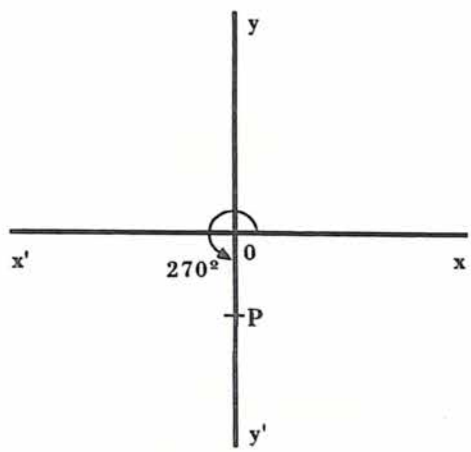


EJEMPLOS

3.-



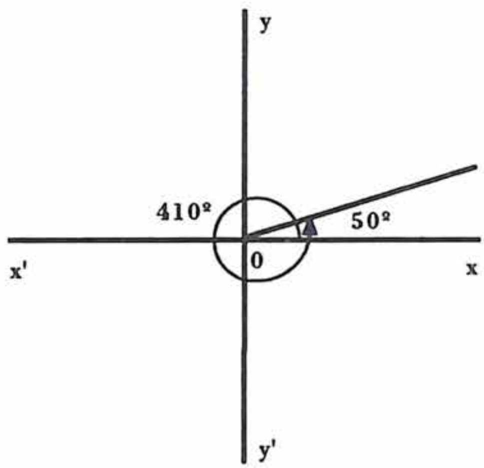
4.-



6.6.3.- Angulos Co-Terminales

Son ángulos en posición normal, cuyos lados terminales coinciden, es decir, difieren en 360° o un múltiplo de 360° (360°, 720°, 1080°, ...)

EJEMPLO



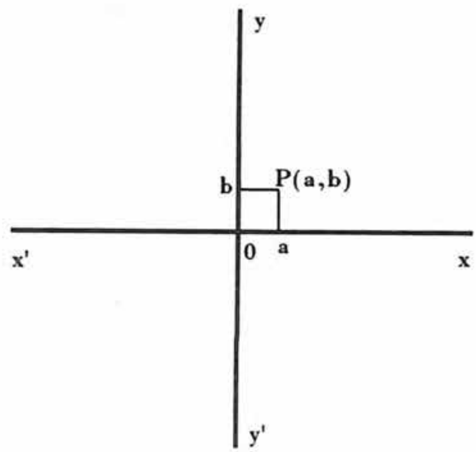
Cuando a un ángulo se le suma o se le resta 360° o un múltiplo de 360° la función no varía.

6.6.4.- Coordenadas Rectangulares

Las coordenadas rectangulares de un punto son su abscisa y su ordenada, estas representan la posición del punto en el plano cartesiano.

Cuando se representa un punto $P(a, b)$, el primer número a es la abscisa y el segundo número b es la ordenada.

EJEMPLO



El eje de las x es llamado eje horizontal y es el eje de las abscisas. El eje de las y es llamado eje vertical y es el eje de las ordenadas.

6.6.4.1.- Abscisa

Es la distancia que hay de un punto al eje de las y, y se mide en el eje de la x, siendo positiva hacia la derecha y negativa hacia la izquierda.

6.6.4.2.- Ordenada

Es la distancia que hay de un punto al eje de las x, y se mide en el eje de la y, siendo positiva hacia arriba y negativa hacia abajo.

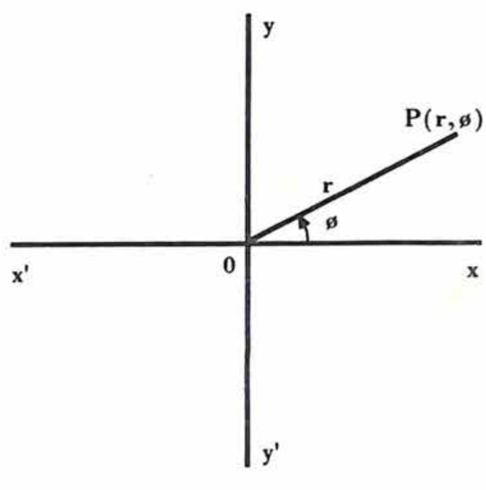
6.6.5.- Coordenadas Polares

Sirven para determinar la posición de un punto en el plano, mediante una distancia y un argumento. Esta distancia se llama eje polar.

EJEMPLO

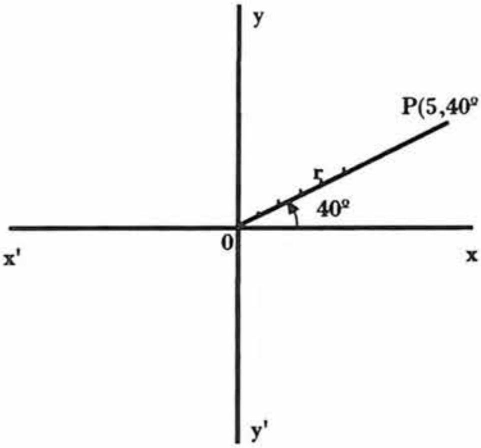
r = módulo

θ = argumento



EJEMPLO

$(5\ ,\ 40^\circ)$



r = módulo = 5

θ = argumento = 40°

6.6.6.- Funciones Trigonométricas de un Angulo Agudo

1ro. Seno de un ángulo agudo es igual al cateto opuesto entre la hipotenusa.

2do. Coseno de un ángulo agudo es igual al cateto adyacente entre la hipotenusa.

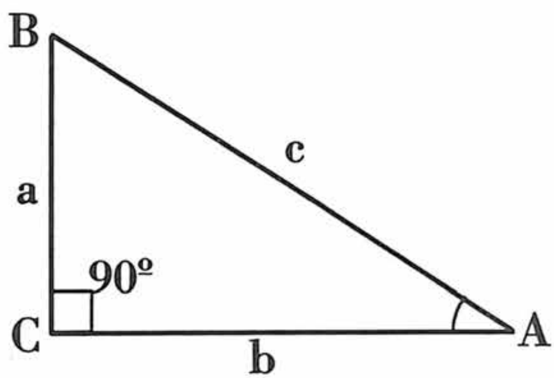
3ro. Tangente de un ángulo agudo es igual al cateto opuesto entre el cateto adyacente.

4to. Cotangente de un ángulo agudo es igual al cateto adyacente entre el cateto opuesto.

5$^{to.}$ Secante de un ángulo agudo es igual a la hipotenusa entre el cateto adyacente.

6$^{to.}$ Cosecante de un ángulo agudo es igual a la hipotenusa entre el cateto opuesto.

EJEMPLO



$$\text{Sen}\angle A = \frac{\text{cat . op}}{\text{hip}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cos}\angle A = \frac{\text{cat . ady}}{\text{hip}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tg}\angle A = \frac{\text{cat . op}}{\text{cat . ady}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Ctg}\angle A = \frac{\text{cat . ady.}}{\text{cat . op.}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Sec}\angle A = \frac{\text{hip}}{\text{cat . ady}} = \frac{c}{b}$$

EJEMPLO

$$\text{Ctg}\angle A = \frac{\text{cat . ady.}}{\text{cat . op.}} = \frac{b}{a}$$

El triángulo ABC es rectangulo, tiene un angulo recto ($\angle$ c = 90°).

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right. \quad \{\text{catetos}$$

$$c \quad \{\text{hipotenusa}$$

Por Pitagoras $a^2 + b^2 = c^2$

De donde

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

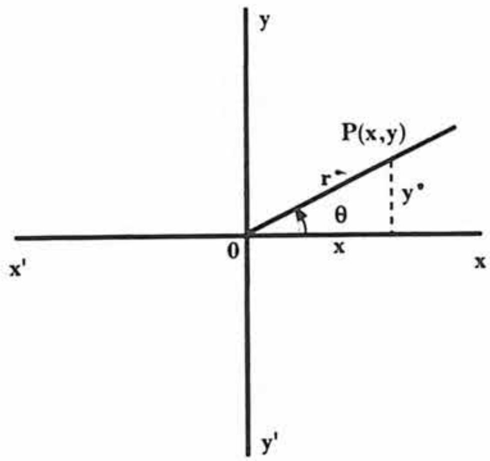
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

6.6.7.- Funciones Trigonométricas para un Angulo Cualquiera

Seno = Ordenada entre distancia.
Coseno = Abscisa entre distancia.
Tangente = Ordenada entre abscisa.
Cotangente = Abscisa entre ordenada.

Secante = Distancia entre abscisa.
Cosecante = Distancia entre ordenada.



$$\text{Seno } \theta = \frac{y}{r}$$

$$\text{Coseno } \theta = \frac{x}{r}$$

$$\text{Tangente } \theta = \frac{y}{x}$$

$$\text{Co tan gente } \theta = \frac{x}{y}$$

$$\text{Secante } \theta = \frac{r}{x}$$

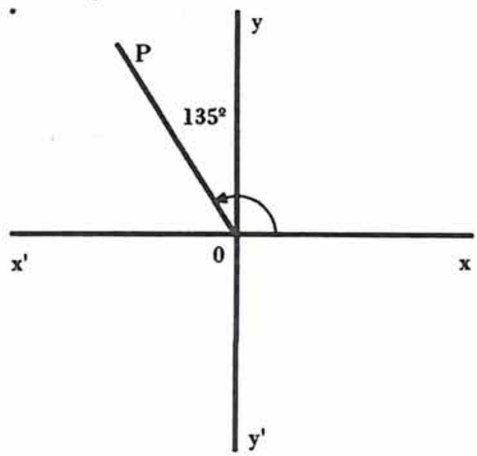
$$\text{Co sec ante } \theta = \frac{r}{y}$$

Ejercicios

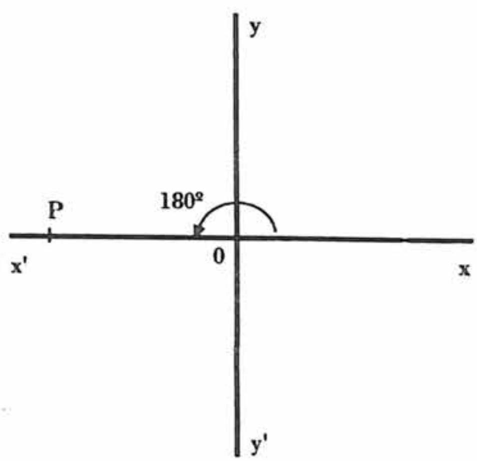
EJEMPLOS

1.- Construir los siguientes ángulos en posición normal.

1.- 135°



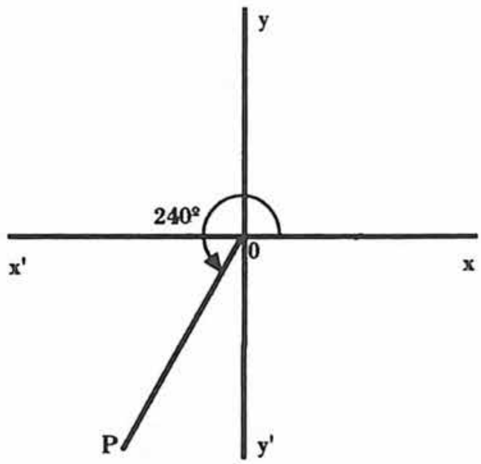
2.- 180°



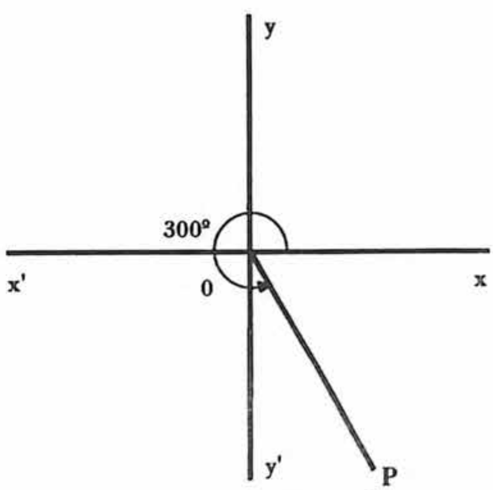
Ejercicios

EJEMPLOS

3.- 240°



4.- 300°



Ejercicios

EJEMPLOS

2.- En qué cuadrante o eje se encuentran los siguientes puntos. Explique.

1.- $P_1 (-x,y)$

Está en el segundo cuadrante.

2.- $P_2 (0, y)$

Está en el eje de las ordenadas positivas.

3.- $P_3 (-x, 0)$

Está en el eje de las x negativas.

4.- $P4 (x,-y)$

Está en el cuarto cuadrante.

3.-

a.- ¿En qué cuadrante las ordenadas son negativas? Explique. En el tercero y cuarto son negativas porque están hacia abajo.

Ejercicios

EJEMPLOS

b.- ¿En qué cuadrante las abscisas son positivas? Explique. Las abscisas son positivas en el primer y cuarto cuadrante porque están a la derecha.

4.- ¿De qué cuadrante son los siguientes ángulos?, si:

1.- Seno es negativo. Explique.

Puede estar en el tercero o cuarto cuadrante porque las ordenadas son negativas.

2.- Tangente positiva. Explique.

La tangente es positiva en el primero y en el tercer cuadrante. En el primero porque la ordenada y la abscisa son positivas. En el tercero porque la ordenada y la abscisa son negativas.

5.- ¿En qué cuadrante debe estar un ángulo si:

1.- Seno y coseno son positivos.

En el primer cuadrante.

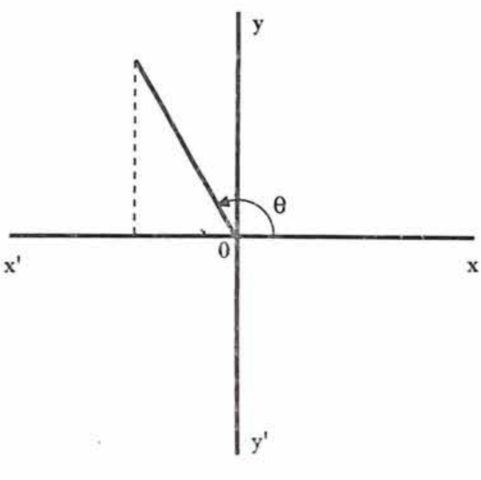
Ejercicios

EJEMPLOS

2.- Cotangente y secante son negativas.
En el segundo cuadrante.

6.- Hacer la gráfica de un ángulo en:

1.- El segundo cuadrante, y decir el signo del coseno y la cotangente.



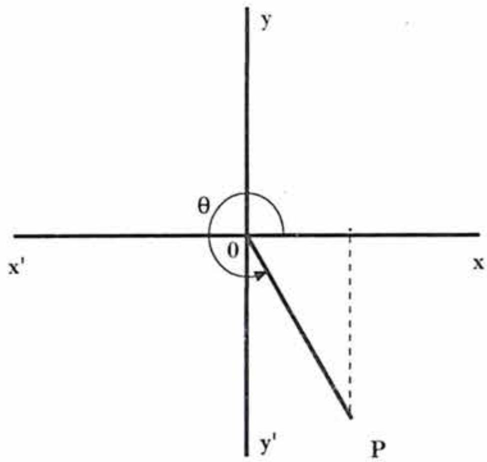
coseno (–)

cotangente (–)

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- En el cuarto cuadrante y decir el signo del seno y la secante.



seno (–)

secante (+)

7.- Si un punto P está:

1.- Sobre el eje de las x negativas. ¿Cuáles son sus coordenadas?

P (–x, 0) son sus coordenadas.

2.- Sobre el eje de las y negativas. ¿Cuáles son sus coordenadas?

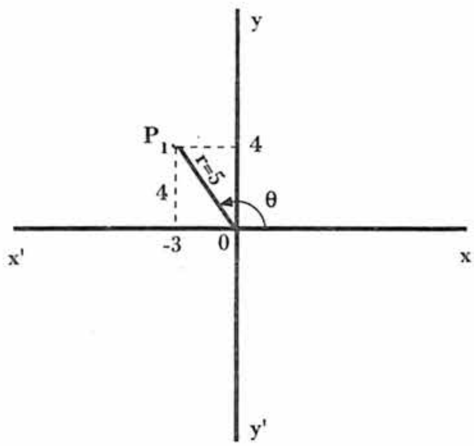
P (0,–y) son sus coordenadas.

Ejercicios

EJEMPLOS

8.- Determinar el valor del seno, coseno y tangente del ángulo θ (dirigido en posición normal) siendo P un punto del lado terminal, si:

1.- $P_1(-3, 4)$



$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Seno } \theta = \frac{4}{5}$$

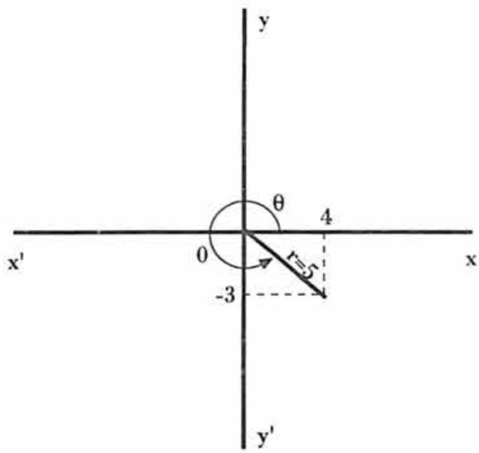
$$\text{Cos } \theta = \frac{-3}{5}$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{4}{-3}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- $P_2\ (4, -3)$



$$r = \sqrt{4^2 + (-3)^2}$$

$$r = \sqrt{16 + 9}$$

$$r = \sqrt{25}$$

$$r = 5$$

$$\text{Seno } \theta = \frac{-3}{5}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{4}{5}$$

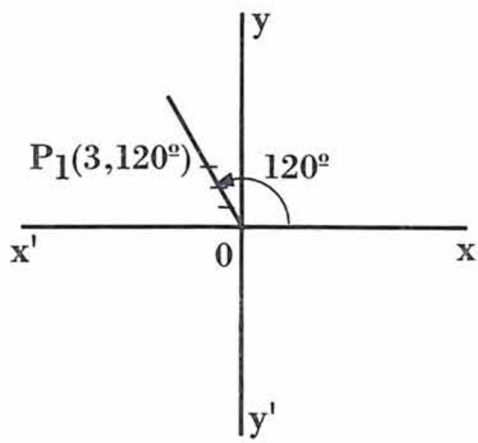
$$\text{Tan } \theta = \frac{-3}{4}$$

Ejercicios

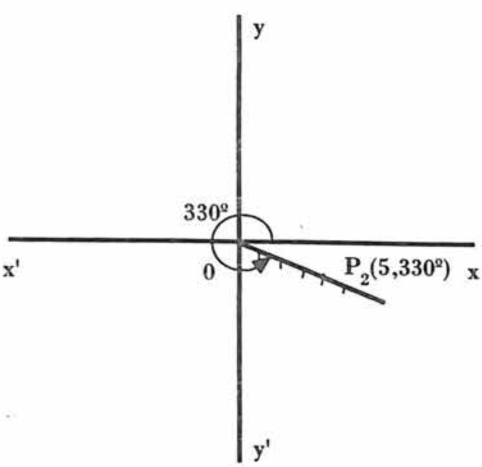
EJEMPLOS

9.- Situar el punto

1.- $P_1\,(3,\ 120°)$



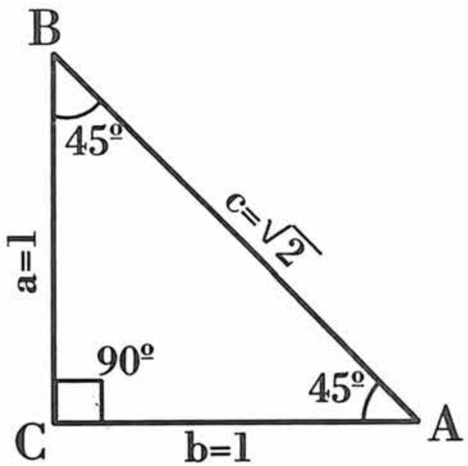
2.- $P_2\,(5,\ 330°)$



6.6.8.- Funciones de 45°

Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles (los dos catetos iguales) por conveniencia le vamos a dar el valor 1 a los catetos.

EJEMPLO



$$c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Tag } 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

EJEMPLO

$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

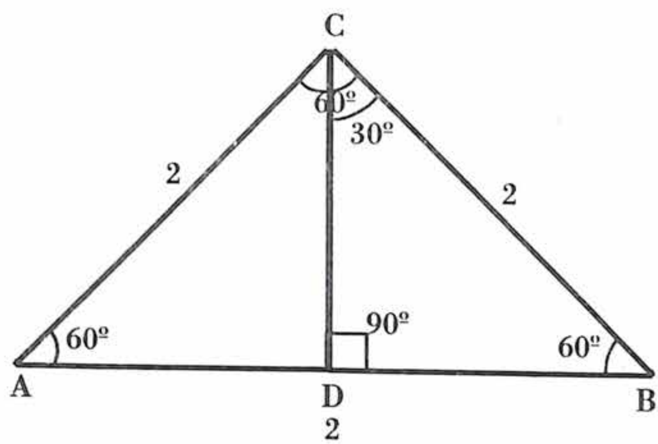
$$\text{Cos } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Tag } 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

6.6.9.- Funciones de 30° y 60°

Sea ABC un triángulo equilátero en que cada ángulo mide 60°, por conveniencia cada lado es igual a 2.

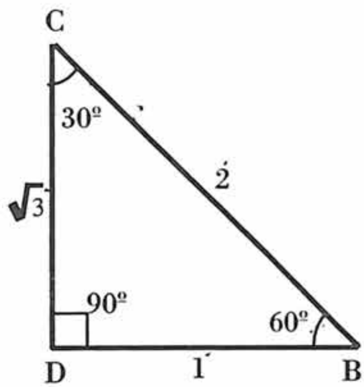
EJEMPLO



EJEMPLO

Sea DC bisectriz del ángulo C

Tenemos



$$CD = \sqrt{2^2 - 1^2} = 3$$

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{Sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tang } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{Tang } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\text{Cot } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \text{Cot } 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Sec } 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \text{Sec } 60^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{Csc } 30^\circ = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{Csc } 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

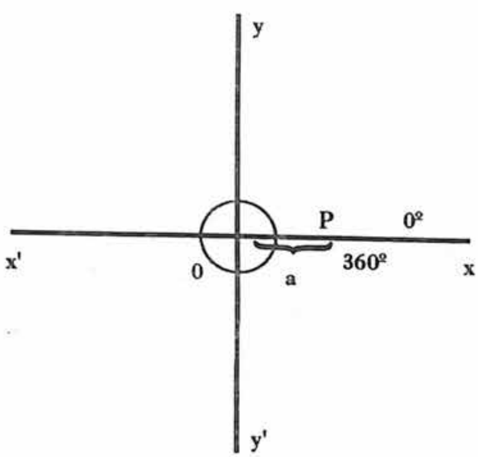
Ejercicios

Funciones

1.- 0° y 360°
2.- 90°
3.- 180°
4.- 270°
5.- 120°
6.- 135°
7.- 150°
8.- 210°
9.- 240°
10.- 300°
11.- 315°
12.- 330°

Soluciones de los ejercicios 1, 3, 5, 8, 11

1.- 0° y 360°



Ord = 0

abs = a

dist = a

$$\text{Sen } 0^\circ \text{ y } 360^\circ = \frac{\text{ord}}{\text{dist}} = \frac{0}{a} = 0$$

$$\text{Cos } 0^\circ \text{ y } 360^\circ = \frac{\text{abs}}{\text{dist}} = \frac{a}{a} = 1$$

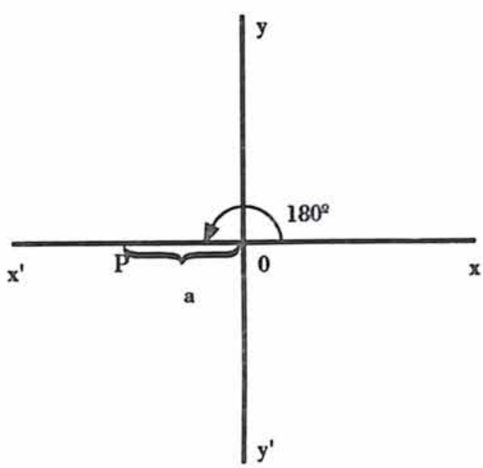
$$\text{Tag } 0^\circ \text{ y } 360^\circ = \frac{\text{ord}}{\text{abs}} = \frac{0}{a} = 0$$

$$\text{Ctg } 0^\circ \text{ y } 360^\circ = \frac{\text{abs}}{\text{ord}} = \frac{a}{0} = \infty$$

$$\text{Sec } 0^\circ \text{ y } 360^\circ = \frac{\text{dist}}{\text{abs}} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\text{Cosc } 0^\circ \text{ y } 360^\circ = \frac{\text{dist}}{\text{ord}} = \frac{a}{0} = \infty$$

3.- 180°



ord = 0

abs = −a

dist = a

$$\text{Sen } 180^\circ = \frac{\text{ord}}{\text{dist}} = \frac{0}{a} = 0$$

$$\text{Cos } 180^\circ = \frac{\text{absc}}{\text{dist}} = \frac{-a}{a} = -1$$

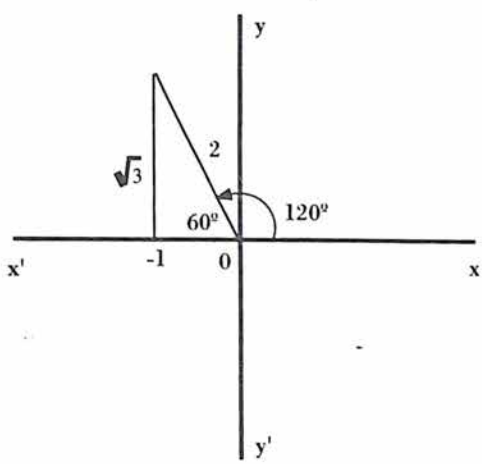
$$\text{Tang } 180^\circ = \frac{\text{ord}}{\text{abs}} = \frac{0}{-a} = 0$$

$$\text{Cot } 180^\circ = \frac{\text{abs}}{\text{ord}} = \frac{-a}{0} = -\infty$$

$$\text{Sec } 180^\circ = \frac{\text{dist}}{\text{absc}} = \frac{a}{-a} = -1$$

$$\text{Csc } 180^\circ = \frac{\text{dist}}{\text{ord}} = \frac{a}{0} = \infty$$

5.- 120°



$\text{ord} = \sqrt{3}$

$\text{abs} = -1$

$$\text{Sen } 120° = \frac{\text{ord}}{\text{dist}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos } 120° = \frac{\text{absc}}{\text{dist}} = \frac{-1}{2}$$

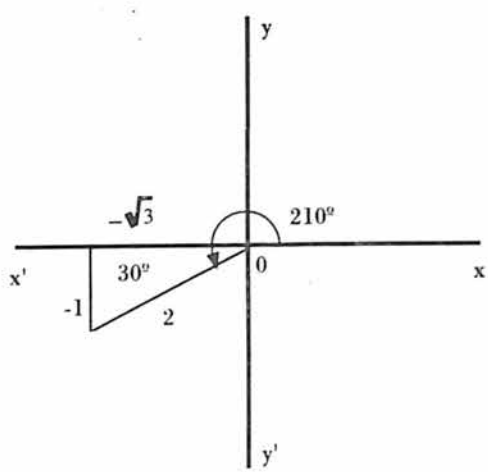
$$\text{Tang } 120° = \frac{\text{ord}}{\text{absc}} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$\text{Cot } 120° = \frac{\text{absc}}{\text{ord}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Sec } 120° = \frac{\text{dist}}{\text{absc}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\text{Csc } 120° = \frac{\text{dist}}{\text{ord}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

8.- 210°



$$\text{ord} = -1$$

$$\text{abs} = -\sqrt{3}$$

$$\text{dis} = 2$$

$$\text{sen } 210° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

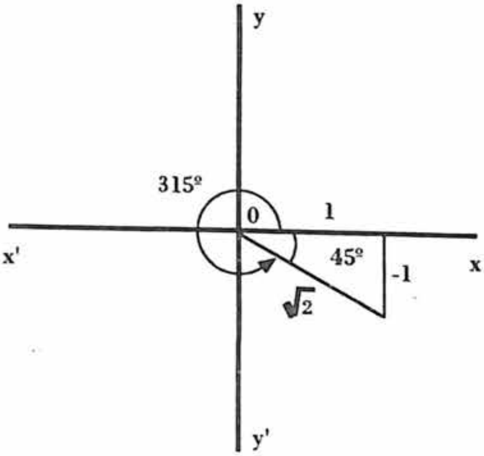
$$\text{tag } 210° = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ctg } 210° = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

$$\sec 210° = \frac{2}{-\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cosc } 210° = \frac{2}{-1} = -2$$

11.- 315°



$$\text{ord} = -1$$

$$\text{abs} = 1$$

$$\text{dis} = \sqrt{2}$$

$$\text{sen } 315^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\ 315^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tag } 315^\circ = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\text{cotg } 315^\circ = \frac{1}{-1} = -1$$

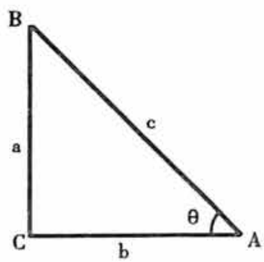
$$\sec\ 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\text{cosc } 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

6.6.10.- Relaciones Pitagóricas

DEMOSTRAR QUE:

1.- $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$



$a^2 + b^2 = c^2$ (Pitágoras)

DEMOSTRAR QUE:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$ (dividiendo ambos miembros entre c^2)

PARA RECORDAR

$$\text{sen}^2\ \theta + \cos^2\ \theta = 1$$

2.- $\text{sen}^2\ \theta = 1 - \cos^2\ \theta$

3.- $\cos^2\ \theta = 1 - \text{sen}^2\ \theta$

4.- $\text{sen}\ \theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\ \theta}$

5.- $\cos\ \theta = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\ \theta}$

6.- $1 + \text{tag}^2\ \theta = \sec^2\ \theta$

7.- $1 + \text{ctg}^2\ \theta = \cos c^2\ \theta$

Todas estas identidades trigonométricas deben ser recordadas.

DEMOSTRACION DEL 3, 5, 7

3.- $\cos^2 \theta = 1 - \text{sen}^2 \theta$

$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

DEMOSTRAR QUE:

PARA RECORDAR

$$\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$$

5.- $\cos \theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$

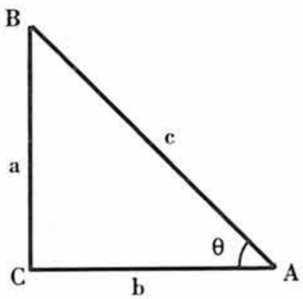
$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$

PARA RECORDAR

$$\cos \theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$$

7.- $1 + \operatorname{cotg}^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$



$a^2 + b^2 = c^2$ (Pitágoras)

$\dfrac{a^2}{a^2} + \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{c^2}{a^2}$ (dividiendo entre a^2)

PARA RECORDAR

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

6.6.11.- Relaciones Binarias

DEMOSTRAR QUE:

1.- $\text{sen } \theta = \dfrac{1}{\cos c \ \theta}$

2.- $\cos \theta = \dfrac{1}{\sec \theta}$

3.- $\text{tag } \theta = \dfrac{1}{ctg \ \theta}$

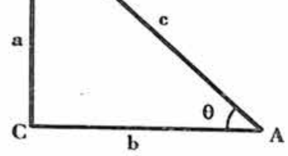
4.- $\text{ctg } \theta = \dfrac{1}{tag \ \theta}$

5.- $\sec \theta = \dfrac{1}{\cos \theta}$

6.- $\csc \theta = \dfrac{1}{\sec \theta}$

DEMOSTRACIONES DEL 1, 3, 5

1.- $\text{sen } \theta = \dfrac{1}{\csc \theta}$



DEMOSTRAR QUE:

$$\operatorname{sen}\ \theta = \frac{a}{c} \qquad \text{(definición)}$$

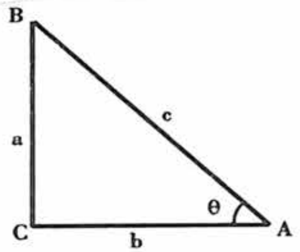
$$\operatorname{sen}\ \theta = \frac{a/a}{c/a}$$ (dividiendo el numerador y denominador entre a)

PARA RECORDAR

$$\operatorname{sen}\ \theta = \frac{1}{\csc\ \theta}$$

3.- $\operatorname{tag}\ \theta = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\ \theta}$

DEMOSTRACION



$$\tan\ \theta = \frac{a}{b} \qquad \text{(definición)}$$

$$\tan g\ \theta = \frac{a/a}{b/a}$$ (dividiendo numerador y denominador entre a)

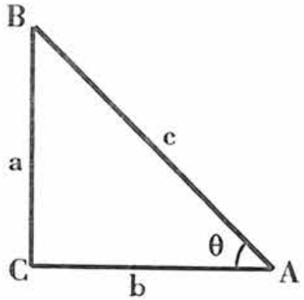
DEMOSTRAR QUE:

PARA RECORDAR

$$\tan\ \theta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\ \theta}$$

5.- $\sec\ \theta = \dfrac{1}{\cos\ \theta}$

DEMOSTRACION



$\sec\ \theta = \dfrac{c}{b}$ (definición)

$\sec\ \theta = \dfrac{c/c}{b/c}$ (dividiendo numerador y denominador entre a)

PARA RECORDAR

$$\sec\ \theta = \frac{1}{\cos\ \theta}$$

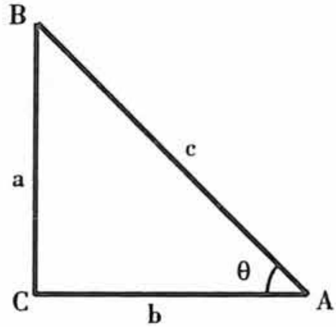
6.6.12.- Relaciones Ternarias

DEMOSTRAR QUE:

1.- $\text{tag}\ \theta = \dfrac{\text{sen}\ \theta}{\cos\ \theta}$

2.- $\cot\ \theta = \dfrac{\cos\ \theta}{\text{sen}\ \theta}$

DEMOSTRACION DEL No. 2



$\text{ctg}\ \ \theta = \dfrac{b}{a}$ (definición)

$\text{ctg}\ \ \theta = \dfrac{b\ /\ c}{a\ /\ c}$ (dividiendo numerador y denominador entre c)

PARA RECORDAR

$$\text{ctg}\ \ \theta = \frac{\cos\ \ \theta}{\text{sen}\ \ \theta}$$

6.6.13.- Funciones Trigonométricas de la Suma de Dos Angulos

PARA RECORDAR

1.- $\text{sen}\,(x + y) = \text{sen}\,x\,.\,\cos y + \cos x\,.\,\text{sen}\,y$

2.- $\cos\,(x + y) = \cos x\,.\,\cos y - \text{sen}\,x\,.\,\text{sen}\,y$

3.- $\text{tag}\left(x + y\right) = \dfrac{\text{tag}\,x + \text{tag}\,y}{1 - \text{tag}\,x\,.\,\text{tag}\,y}$

4.- $\text{ctg}\left(x + y\right) = \dfrac{\text{ctg}\,x\,.\,\text{ctg}\,y - 1}{\text{ctg}\,y + \text{ctg}\,x}$

Estas funciones deben recordarse.

Ejercicio # 2. Unidad No. 6

I.- Demostrar que:

1.- $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta = 1$

2.- $\text{tag}\,\theta\,.\,\csc\,\theta = \sec\,\theta$

3.- $\text{ctg}\,\theta\,.\,\sec\,\theta = \csc\,\theta$

4.- $\text{sen}^2\,\theta = 1 - \cos^2\,\theta$

5.- $1 + \text{ctg}^2\,\theta = \csc^2\theta$

6.- $\csc\theta\,.\,\cos\theta = \text{ctg}\,\theta$

7.- $\sec\theta\,.\,\text{sen}\,\theta = \text{tag}\,\theta$

8.- $\text{sen}\,\theta\,.\,\sec\theta\,.\,\cot\theta = 1$

9.- $\sec^2\theta\,.\,\csc^2\theta = \sec^2\theta + \csc^2\theta$

10.- 10.- $\dfrac{\text{sen}\ \theta}{\csc\ \theta} + \dfrac{\cos}{\sec}$

II.- Construir los siguientes ángulos en posición normal.

1.- 270°

2.- –55°

3.- 60°

4.- 36°

5.- 185°

III.- En qué lugar se encuentran los siguientes puntos en el plano cartesiano.

1.- (–x, –y)

2.- (0, y)

3.- (–x, 0)

4.- (x, –y)

5.- (x, y)

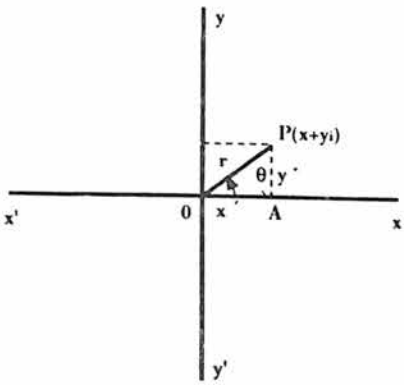
IV.- Determinar el valor de las funciones trigonométricas del ángulo α (dirigido en posición normal) siendo p un punto del lado terminal, si:

1.- $P_1\,(-4, 3)$
2.- $P_2\,(-3, -4)$
3.- $P_3\,(3_{\ 120°})$
4.- $P_4\,(4_{\ 330°})$
5.- $(4_{\ 225°})$

V.- ¿Cuáles son las coordenadas de un punto que está?

1.- Sobre el eje de las x negativas.
2.- Sobre el eje de las y negativas

6.6.13.- Forma Polar o Trigonométrica del Número Complejo (x + yi).



Sea P el número complejo (x + yi), representado por el vector OP.

Sea r la longitud, módulo o valor absoluto del número complejo y siempre es positivo.

Sea θ el ángulo que forma OP con el sentido positivo del eje de las x y se le llama argumento o amplitud del número complejo.

El dominio de este argumento lo vamos a restringir a $0° \leq \theta < 360°$.

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{tg } \theta = \frac{y}{x}$$

$$x = r \,.\, \cos\theta \rightarrow \frac{\cos\theta}{1} = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \,.\, \cos\theta$$

$$y = r \,.\, \text{sen } \theta \rightarrow \frac{\text{sen } \theta}{1} = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \,.\, \text{sen } \theta$$

Tenemos

$$x + yi = r \,.\, \cos\theta + i \,.\, r \,.\, \text{sen } \theta$$

$$x + yi = r\,(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$$

$$= r\,(\cos\theta + i \text{ sen } \theta) \qquad = r_\theta$$

Forma polar o trigonométrica.

Ejercicios

EJEMPLOS

Expresar en forma trigonométrica.

1.- $1 + i$

1er. cuadrante

$\theta =$

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\text{tag } \theta = \frac{1}{1} = 1$

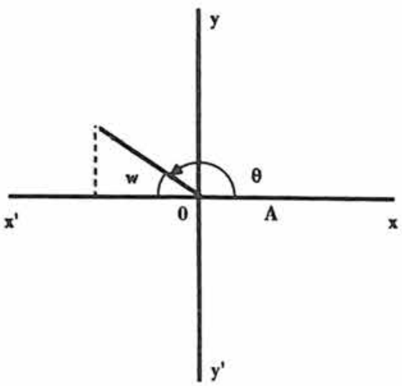
$\theta = 45^\circ$

$\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \text{ sen } 45^\circ)$

$\sqrt{2}_{45^\circ}$

2.- $-\sqrt{3} + i$

2do. cuadrante



Ejercicios

EJEMPLOS

$$\theta = 180^\circ - w$$

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{tg } \theta w = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$w = 30^\circ$$

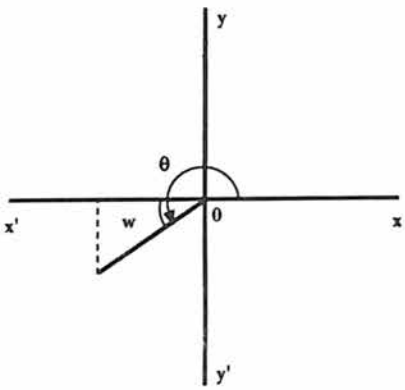
$$\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$2\,(\cos 150^\circ + i \text{ sen } 150^\circ)$$

$$2_{150^\circ}$$

3.- $-1 - \sqrt{3}i$

3er. cuadrante



Ejercicios

EJEMPLOS

$\theta = 180° +$

$$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{tg } w = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$w = 60°$

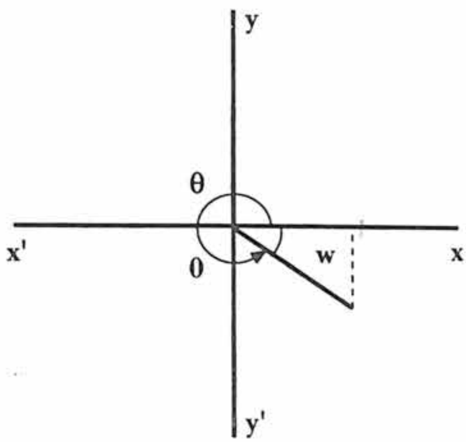
$\theta = 180° + 60° = 240°$

$2\ (\cos 240° + i \text{ sen } 240°)$

$2_{240°}$

4.- $2 - 2i$

4to. cuadrante



Ejercicios

EJEMPLOS

$$\theta = 360° - w$$

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{tg } w = \frac{2}{2} = 1$$

$$w = 45°$$

$$\theta = 360° - 45° = 315°$$

$$2\sqrt{2}\left(\cos\ 315° + i \text{ sen } 315°\right)$$

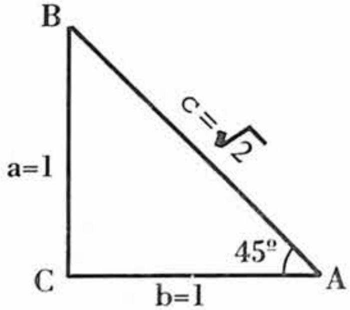
$$2\sqrt{2}_{315°}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

Expresar en forma rectangular

1.- $\sqrt{2}\left(\cos\ 45° + i \text{ sen } 45°\right)$



Ejercicios

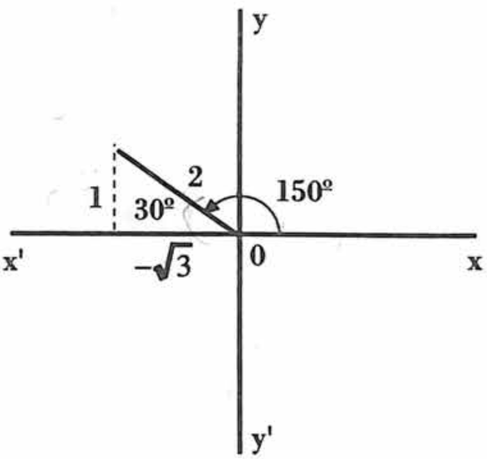
EJEMPLOS

$$\cos\ 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{sen}\ 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i$$

2.- 2 (Cos 150° + i sen 150°)



$$\cos\ 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\ 150^{\circ} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

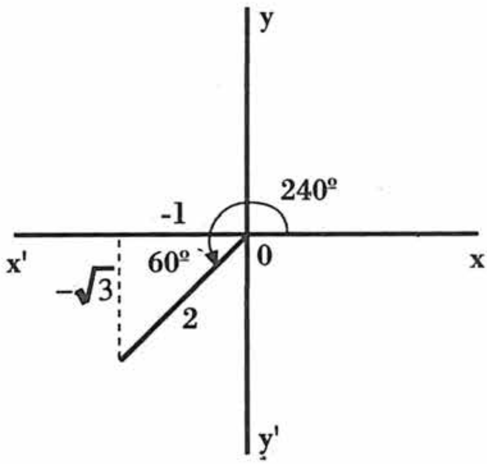
Ejercicios

EJEMPLOS

$$\cancel{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}+i\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$-\sqrt{3}+i$$

3.- 2 (Cos 240° + i sen 240°)



$$\cos\ 240^{\circ}=-\frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\ 240^{\circ}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

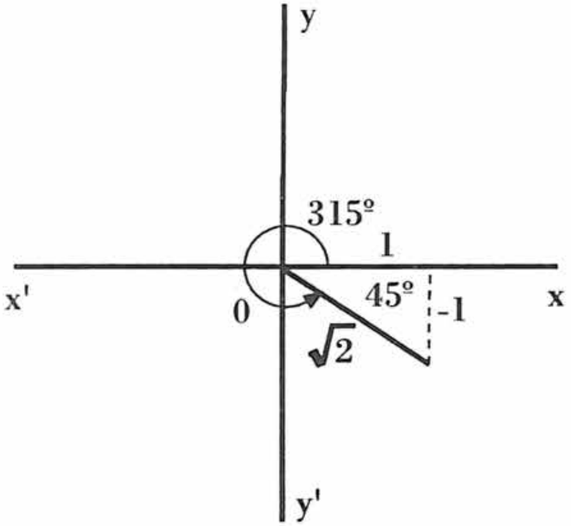
$$\cancel{2}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}i\right)$$

$$-1-\sqrt{3}\ i$$

Ejercicios

EJEMPLOS

4.- $2\sqrt{2}\left(\cos\ 315^{\circ}\ +\ i\ \text{sen}\ 315^{\circ}\right)$



$$\cos\ 315^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{sen}\ 315^{\circ} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt{2}\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ i\right)$$

$$2 - 2i$$

Ejercicios

EJEMPLOS

Expresar en forma trigonométrica

1.- -2

$-2 = 2_{180°} = 2\,(\cos 180° + i \,\text{sen}\, 180°)$

2.- $3i$

$3i = 3_{90°} = 3\,(\cos 90° + i \,\text{sen}\, 90°)$

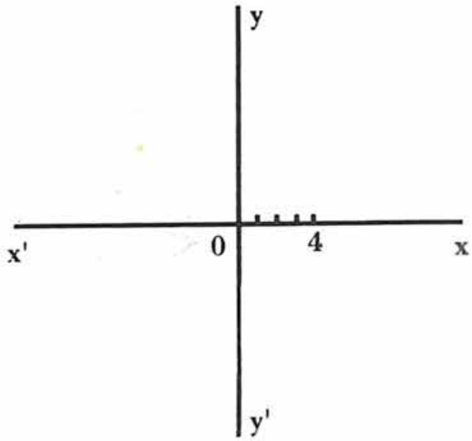
3.- 5

$5 = 5_{0°} = 5\,(\cos 0° + i \,\text{sen}\, 0°)$

4.- $-2i$

$-2i = 2_{270°} = 2\,(\cos 270° + i \,\text{sen}\, 270°)$

5.-

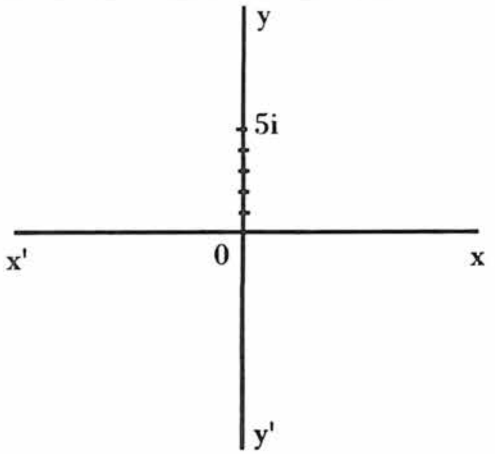


$4_{0°} = 4\,(\cos 0° + i \,\text{sen}\, 0°)$

Ejercicios

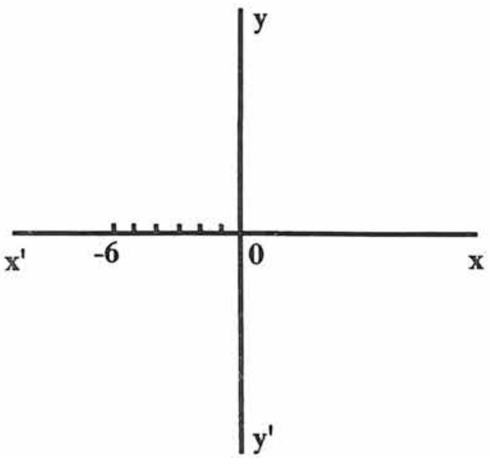
EJEMPLOS

6.-



$$5_{90°} = 5\ (\cos 90° + i \text{ sen } 90°)$$

7.-



$$-6 = 6_{180°} = 6\ (\cos 180° + i \text{ sen } 180°)$$

6.6.14.- Operaciones con los Números Complejos en Forma Trigonométrica

El producto de dos números complejos en forma trigonométrica, es otro complejo que tiene por módulo el producto de los módulos, y por argumento la suma de los argumentos.

FORMULA

$$r\ (\cos\ \theta + i\ \text{sen}\ \theta)\ .\ r'\ (\cos\ B + i\ \text{sen}\ B)$$

$$= r\ .\ r'\ [\cos\ (\theta + B) + i\ \text{sen}\ (\theta + B)]$$

EJEMPLO

$$2\ (\cos 20° + i\ \text{sen}\ 20°)\ .\ 5\ (\cos 30° + i\ \text{sen}\ 30°)$$

$$= 2 \times 5\ [\cos\ (20° + 30°) + i\ \text{sen}\ (20° + 30°)]$$

$$= 10\ (\cos 50° + i\ \text{sen}\ 50°$$

La división de dos números complejos en forma trigonométrica es otro complejo que tiene por módulo el cociente entre los módulos y por argumento la diferencia entre los argumentos.

FORMULA

$$\frac{r\left(\cos\theta + i\ \text{sen}\,\theta\right)}{r'\left(\cos ß + i\ \text{sen} ß\right)} = \frac{r}{r'}\left[\cos\left(\theta - ß\right) + i\ \text{sen}\left(\theta - ß\right)\right]$$

$$= \frac{r}{r'}\left[\cos\ \left(\theta - B\right) + i\ \text{sen}\ \left(\theta - B\right)\right]$$

EJEMPLO

$$\frac{8(\cos\ 60° + i\ \text{sen}\ 60°)}{4(\cos\ 40° + i\ \text{sen}\ 40°)}$$

$$= \frac{8}{4}\left[\cos\ (60° - 40°) + i\ \text{sen}\ (60° - 40°)\right]$$

$$= 2(\cos\ 20° + i\ \text{sen}\ 20°)$$

6.6.15.- Teorema de Moivre

Si n es un número racional y positivo entonces $[r\ (\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)]^n = r^n\ [\cos\ (\theta \times n) + i\ \text{sen}\ (\theta \times n)]$.

Es decir la potencia de un número complejo en forma trigonométrica es otro complejo que tiene por módulo, el módulo elevado a dicha potencia y por argumento el producto del argumento por el exponente.

EJEMPLO

$$[2\ (\cos\ 40° + i\ \text{sen}\ 40°)]^4$$

$$= 2^4\ [\cos\ (40° \times 4) + i\ \text{sen}\ (40° \times 4)]$$

$$= 16\ (\cos\ 160° + i\ \text{sen}\ 160°)$$

6.6.16.- Raíz de un Número Complejo en Forma Trigonométrica

Todo número con excepción del cero sea real o complejo tiene exactamente n raíces enésimas diferentes.

Si tenemos $\sqrt[n]{r(\cos\theta + i\ \text{sen}\,\theta)}$ podemos escribir

$$\left[r(\cos\theta + i\ \text{sen}\,\theta)\right]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\theta \times \frac{1}{n}\right) + i\ \text{sen}\left(\theta \times \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta}{n} + i\ \text{sen}\,\frac{\theta}{n}\right]$$

Pero

$$\cos\frac{\theta}{n} + i\ \text{sen}\,\frac{\theta}{n} =$$

$$\cos\left(\frac{\theta + k \times 360^\circ}{n}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{\theta + k \times 360^\circ}{n}\right)$$

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta + i\ \text{sen}\,\theta)}$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + k \times 360^\circ}{n}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{\theta + k \times 360^\circ}{n}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$

Gráficamente estas raíces son los vórtices de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia con centro en el origen y radio igual a $\sqrt[n]{r}$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Calcular las 3 raíces cúbicas de la unidad negativa.

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_{180°}} = \sqrt[3]{1(\cos\ 180° + i\ \text{sen}\ 180°)}$$

$$= 1^{\frac{1}{3}}\left[\begin{array}{l}\cos\left(\dfrac{180° + k \times 360°}{3}\right) + \\ i\ \text{sen}\left(\dfrac{180° + k \times 360°}{3}\right)\end{array}\right]$$

Para K = 0

$$1\left[\begin{array}{l}\cos\left(\dfrac{180° + 0 \times 360°}{3}\right) + \\ i\ \text{sen}\left(\dfrac{180° + 0 \times 360°}{3}\right)\end{array}\right]$$

$$= (\cos\ 60° + i\ \text{sen}\ 60°)$$

$$\cos\ 60° = \frac{1}{2}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

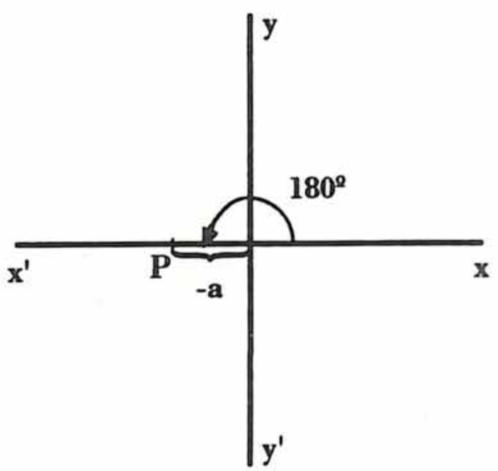
$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Para K = 1

$$\left[\cos\left(\frac{180° + 1 \times 360°}{3}\right) + i \text{ sen}\left(\frac{180° + 1 \times 360°}{3}\right)\right]$$

$$= \left(\cos 180° + i \text{ sen } 180°\right)$$



Ejercicios

EJEMPLOS

$$\cos\ 180° = \frac{-a}{a} = -1$$

$$\text{sen}\ 180° = \frac{0}{a} = 0$$

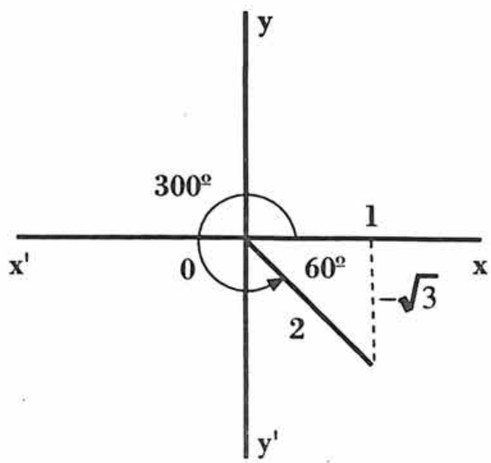
$$\cos\ 180° + i\ \text{sen}\ 180° = -1 + 0i = -1$$

$$x_2 = -1$$

Para K = 2

$$1\left[\begin{array}{l}\cos\left(\dfrac{180º + 2\times 360º}{3}\right) + \\ i\ \text{sen}\left(\dfrac{180º + 2\times 360º}{3}\right)\end{array}\right]$$

$$= [\cos\ 300° + i\ \text{sen}\ 300°]$$



Ejercicios

EJEMPLOS

$$\cos\ 300° = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\ 300° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2.- Usando el Teorema de Moivre calcular $\left(1-\sqrt{3}i\right)^8$

Se debe expresar el número complejo $1-\sqrt{3}i$ **en forma polar.**

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)$$

4to. cuadrante

$$0 = 360° - W$$

$$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan W = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$W = 60°$$

$$W = 360° - 60°$$

$$W = 300°$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$2\ (\cos 300° + i \text{ sen } 300°)$

$= [2\ (\cos 300° + i \text{ sen } 300°)]^8$

$= 2^8\ [\cos (300° \times 8)\ i \text{ sen } (300° \times 8)]$

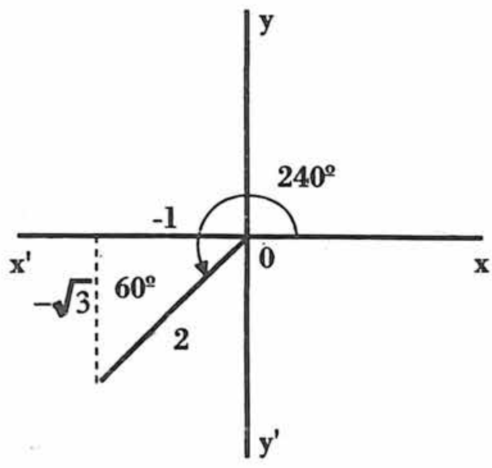
$= 256\ [\cos 2400° + i \text{ sen } 2400°]$

$\cos 2400° = \cos 240°$

$\text{sen } 2400° = \text{sen } 240°$

$= 256\ (\cos 240° + i \text{ sen } 240°)$

Este resultado en forma rectangular es:



Ejercicios

EJEMPLOS

$$\cos 240^{\circ} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} 240^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$256\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$128 - 128\sqrt{3}i$$

EJEMPLO

1.- Calcular todas las raíces de la ecuación $x^3 - 1 = 0$ mediante los siguientes métodos.

A.- Algebráicamente

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

EJEMPLO

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\ i}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ i$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ i$$

B.- Teorema de Moivre

$$x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = 1$$

$$x = \sqrt[3]{1}$$

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt{1_{0°}} = \sqrt{1(\cos\ 0° + i\ \text{sen}\ 0°)}$$

EJEMPLO

$$= 1^{3}\left[\begin{array}{l}\cos\left(\dfrac{0°+k\times 360°}{3}\right)+\\ i\ \text{sen}\left(\dfrac{0°+k\times 360°}{3}\right)\end{array}\right]$$

Para K = 0

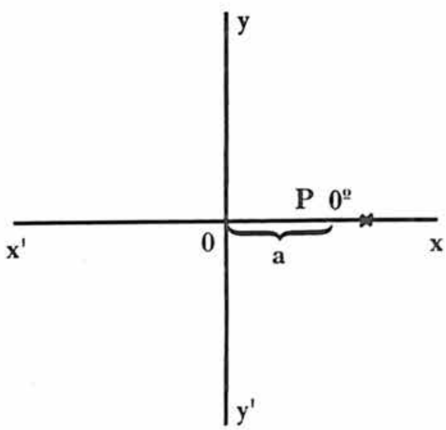
$$1\left[\cos\left(\frac{0°+0\times 360°}{3}\right)+i\ \text{sen}\left(\frac{0°+0\times 360°}{3}\right)\right]$$

$$=\left[\cos\ 0°+i\ \text{sen}\ 0°\right]$$

$$\cos\ 0°=\frac{a}{a}=1$$

$$\text{sen}\,0°=\frac{0}{a}=0$$

$$x_1=1$$



EJEMPLO

Para K = 1

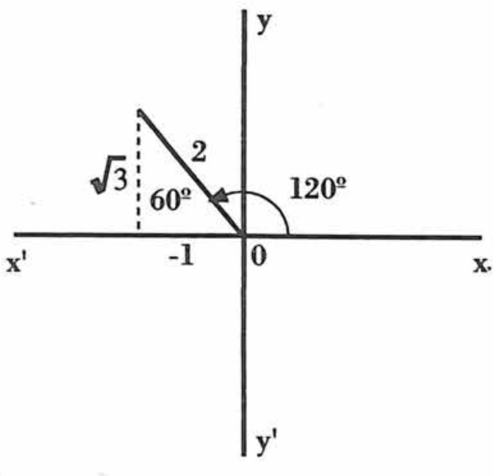
$$1\left[\cos\left(\frac{0°+1\times 360°}{3}\right)+i\ \text{sen}\left(\frac{0°+1\times 360°}{3}\right)\right]$$

$$=\left[\cos\ 120°+i\ \text{sen}\ 120°\right]$$

$$\cos\ 120°=-\frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\ 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ i$$



Para K = 2

$$1\left[\cos\left(\frac{0°+2\times 360°}{3}\right)+i\ \text{sen}\left(\frac{0°+2\times 360°}{3}\right)\right]$$

EJEMPLO

$$=\left[\cos\ 240°+i\ \text{sen}\ 240°\right]$$

$$\cos\ 240° = -\frac{1}{2}$$

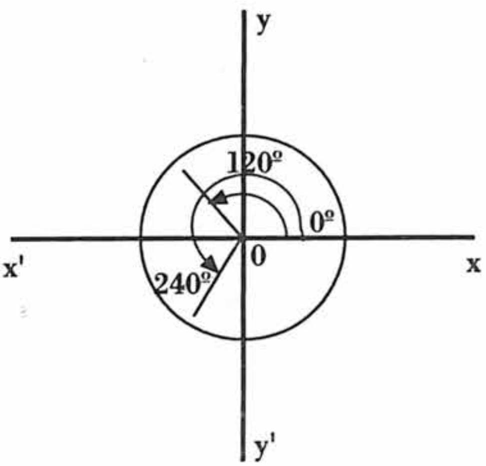
$$\text{sen}\ 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ i$$

6.6.17.- Representación Gráfica de Estas Raíces

El módulo de cada una de estas raíces es 1, por lo tanto están en un círculo de radio 1 centro en el origen.

EJEMPLO



La diferencia de dos argumentos consecutivos es 120°

Ejercicio # 3. Unidad No. 6.

I.- Expresar en forma trigonométrica

1.- $1 + i$

2.- $-3 - 3i$

3.- $\sqrt{3} - i$

4.- $3 - 3i$

5.- $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\ i$

6.- $-1 - i$

7.- $2 - 2i$

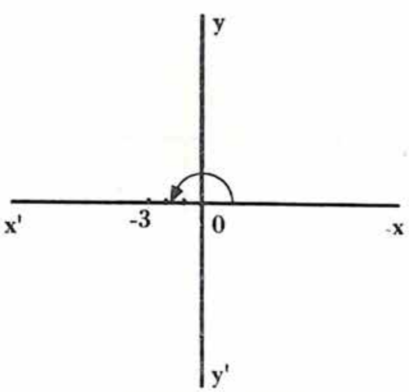
8.- $\sqrt{3} + i$

9.- $1 - \sqrt{3}$

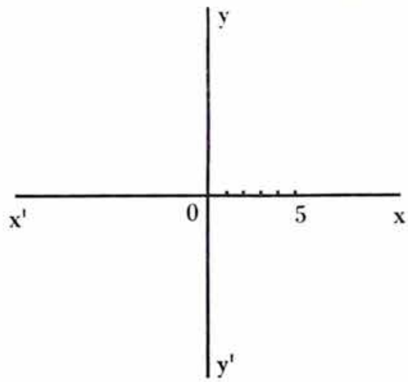
10.- $2 + 2i$

II.- Expresar en forma trigonométrica

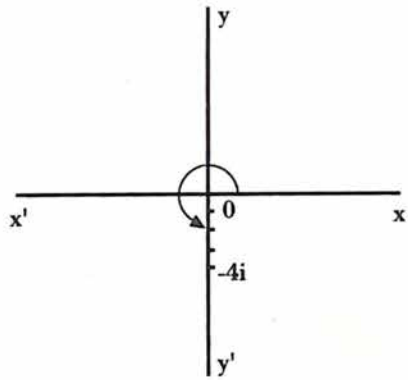
1.-



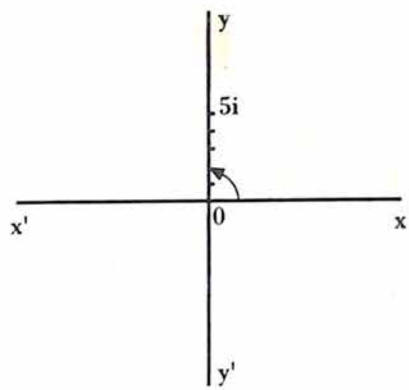
2.-



3.-



4.-



5.- $P(-7i)$

6.- $P(-4)$

7.- $P(6i)$

8.- $P(9)$

9.- $P(-4i)$

III.- Expresar en forma rectangular

1.- $2(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

2.- $3(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$

3.- $\sqrt{2}\left(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°\right)$

4.- $2(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$

5.- $2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

6.- $4(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$

7.- $5(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$

8.- $\sqrt{2}\left(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°\right)$

9.- $2\sqrt{2}\left(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°\right)$

10.- $2(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$

IV.- Efectuar

1.- $2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) \cdot 4(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$

2.- $5(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°) \cdot 4(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$

3.- $6(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°) \cdot 3(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)$

4.- $4(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°) \cdot 6(\cos 35° + i \operatorname{sen} 35°)$

5.- $8(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°) \cdot 5(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$

V.- Efectúa

1.- $\dfrac{6\left(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°\right)}{3\left(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°\right)}$

2.- $\dfrac{8\left(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°\right)}{4\left(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°\right)}$

3.- $\dfrac{12\left(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°\right)}{6\left(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°\right)}$

4.- $\dfrac{10\left(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°\right)}{5\left(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°\right)}$

5.- $\dfrac{8\left(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°\right)}{2\left(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°\right)}$

VI.- Efectúa

1.- $[2\,(\cos 10^\circ + i \operatorname{sen} 10^\circ)]^5$

2.- $[3\,(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)]^4$

3.- $[2\,(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)]^5$

4.- $[4\,(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)]^2$

5.- $[3\,(\cos 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ)]^4$

VII.- Efectuar usando el teorema de Moivre

1.- $\left(\sqrt{3} - i\right)^4$

2.- $\left(1 - \sqrt{3}\, i\right)^3$

3.- $(-1 - i)^6$

4.- $(2 - 2i)^5$

5.- $(1 + i)^4$

VIII.- Hallar las:

1.- 2 raíces cuadradas de la unidad negativa.

2.- 3 raíces cúbicas de la unidad negativa.

3.- 4 raíces cuartas de la unidad positiva.

4.- Raíces cúbicas de $1 - \sqrt{3}\ i$

5.- Raíces cuadradas de $\sqrt{3} + i$

6.- Raíces cúbicas de -8

7.- Raíces cúbicas de 27

8.- Raíces cuartas de $-2 - 2i$

9.- Raíces quintas de -32

10.-Raíces sextas de -1

Ejercicios de Repaso UNIDAD No. 6

I.- Efectúa:

1.- $\left(-2-\sqrt{-16}\right)+\left(-4-3\sqrt{-9}\right)-\left(-5+4\sqrt{-25}\right.$

2.- $\left(3+2\sqrt{-9}\right)\left(4-2\sqrt{-49}\right)$

3.- $\dfrac{\left[3\ (\cos\ 40°+\ i\ \text{sen}\ 40°)\right]^4}{\left[2\ (\cos\ 10°+\ i\ \text{sen}\ 10°)\right]^3}$

4.- $(2-i)^3$

5.- $\sqrt[3]{-8}$

II.- Pruebe que:

1.- $\sec^2 x \,.\, \text{cosc}^2 x = \sec^2 x + \text{cosc}^2 x$

2.- $\dfrac{\text{sen } x}{\text{cosc } x} + \dfrac{\cos x}{\sec x} = 1$

III.- Utilizando el teorema de Moivre, efectuar y el resultado expresarlo en forma rectangular.

1.- $\left(\sqrt{3} + i\right)^4$

2.- $(-1 - i)^5$

IV.- Hallar los valores de x e y si:

1.- $-3x - (2x - 3y)\,i = -6 + 9i$

2.- $2x + (-3x - y)\,i = 4 - 4i$

V.- Resolver algebráicamente y trigonométricamente:

1.- $x^3 + 64 = 0$

2.- $x^3 - 27 = 0$

VI.- Exprese en forma trigonométrica:

1.- $-3i$

2.- $4i$

3.- $\sqrt{-36}$

4.- 8

5.- -6

VII.- Hallar:

1.- $\text{ctg } x \; ; \text{ si sen } x = -\dfrac{4}{5}$

2.- $\sec x \; ; \text{ si csc } x = \dfrac{5}{3}$

VIII- En qué cuadrante se encuentra un ángulo que:

1.- Si tag es positiva.

2.- Si csc es negativa.

IX.- Efectúa:

1.- $\dfrac{2+\sqrt{-9}}{1+\sqrt{-1}}$

2.- $\dfrac{4-\sqrt{-100}}{2-i}$

X.- Exprese en forma rectangular.

1.- $2\,(\cos 450° + i\,\text{sen}\,450°)$

2.- $\sqrt{2}\,(\cos 945° + i\,\text{sen}\,945°)$

UNIDAD No. 7

Teoría de Ecuaciones

UNIDAD No. 7

Teoría de Ecuaciones

Una función racional de grado n con respecto a la variable x es de la forma siguiente:

FORMULA
$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$

En donde n es un número entero y positivo, y los coeficientes a_0, a_1, a_2, ... , a_{n-1}, a_n son constantes cualesquiera.

Si se iguala a cero este polinomio, se obtiene una ecuación algebráica.

FORMULA
$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0;\ a_o \neq 0$

Esta ecuación es de grado n y a_o se le llama coeficiente principal, por ser el coeficiente del término de mayor grado.

EJEMPLO

$$2x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 8x - 7 = 0$$

$a_o = 2,\ a_1 = -4,\ a_2 = 5,\ a_3 = 6,\ a_4 = -8,\ a_5 = -7$

7.1.- Teorema del Residuo

Si se divide un polinomio f (x) entre x – r, siendo r una constante independiente de x, el residuo es f (r).

EJEMPLO

Sea $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 5$, si dividimos este polinomio entre $x - 3$, usando la división algebráica tendremos:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\ 3x^2 & -\ 2x & -\ 5 & x - 3 \\
\cline{5-5}
x^3 & +\ 3x^2 & & & x^2 + 6x + 16 \\
\cline{1-3}
 & 6x^2 & -\ 2x & -\ 5 & \\
 & -6x^2 & +\ 18x & & \\
\cline{2-4}
 & & 16x & -\ 5 & \\
 & & -\ 16x & +\ 48 & \\
\cline{3-4}
 & & & 43 &
\end{array}$$

La división no es exacta y el residuo es igual a 43.

EJEMPLO

Si aplicamos el teorema del residuo tendremos:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 5 \text{ entre } x - 3$$
$$f(3) = (3)^3 + 3(3)^2 - 2(3) - 5$$
$$f(3) = 27 + 3(9) - 6 - 5$$
$$f(3) = 27 + 27 - 6 - 5$$
$$f(3) = 43$$

El residuo es 43 también.

7.2.- Teorema del Factor

1.- Si r es una raíz de la ecuación entera $f(x) = 0$, entonces $x - r$ es un factor del polinomio $f(x)$.

2.- Si $x - r$ es un factor del polinomio $f(x)$, entonces r es una raíz de la ecuación entera $f(x) = 0$.

EJEMPLOS

1.- **Sin efectuar la división calcula el residuo que se obtiene al dividir el polinomio $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 5$ entre $x + 2$ y determine si $x + 2$ es factor.**

Solución:

$$f(-2) = (-2)3 + 2(-2)2 - 11(-2) - 5$$
$$f(-2) = -8 + 2(4) + 22 - 5$$
$$f(-2) = -8 + 8 + 22 - 5$$
$$f(-2) = 17$$

R = 17 ; x + 2 No es factor porque R ≠ 0.

EJEMPLOS

2.- Determinar si x - 2 es un factor del polinomio $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

Solución:

$$f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 14(2) + 24$$
$$f(2) = 8 - 4 - 28 + 24$$
$$f(2) = 0$$

$f(2) = 0$; $x - 2$ es un factor, porque $R = 0$.

3.- **Determinar si $x^n + a^n$, siendo n un número entero positivo par y $a \neq 0$, es divisible entre $x + a$.**

$$f(x) = x^n + a^n$$
$$f(-a) = (-a)^n + (a)^n$$
$$f(-a) = a^n + a^n$$
$$f(-a) = 2a^n$$

$R = 2a^n$; No es divisible porque $R \neq 0$.

4.- **Determinar si $x^n - a^n$ es divisible exactamente entre $x - a$, si n es impar.**

$$f(x) = x^n - a^n$$
$$f(a) = a^n - an$$
$$f(a) = \cancel{a^n} - \cancel{a^n}$$
$$f(a) = 0$$

$F(a) = 0$; Es divisible.

EJEMPLOS

5.- Determinar si la ecuación siguiente:
$x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 7x - 3 = 0$, tiene como raíz a -3

$$f(-3) = (-3)^4 + 5(-3)^3 + 4(-3)^2 - 7(-3) - 3 = 0$$
$$f(-3) = 81 - 135 + 36 + 21 - 3 = 0$$
$$f(-3) = 0$$

$f(-3) = 0$; Es raíz.

7.3.- División Sintética

Con el teorema del residuo se obtiene el residuo al dividir un polinomio $f(x)$ entre $x - r$, hallando $f(r)$.

Con la división sintética además del residuo se obtiene el cociente.

EJEMPLO

Usando la división sintética, hallar el cociente y el residuo que se obtiene al dividir el polinomio
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ entre $x + 2$

1ra. Fila	1	-3	$+4$	-5	-2
2da. Fila		-2	$+10$	-28	
3ra. Fila	1	-5	$+14$	-33	

$R = -33$

$Q(x) = x^2 - 5x + 14$ Polinomio degradado = cociente.

7.3.1.- Observaciones

1.- El polinomio f (x) se debe ordenar descendentemente con respecto a la potencia de x.

2.- En la primera fila se colocan todos los coeficientes del polinomio. Si falta alguna potencia de x, este término se sustituye por un cero.

3.- Se baja a la tercera fila el primer coeficiente, se multiplica este primer coeficiente por r y se coloca en la segunda fila debajo del segundo coeficiente, se suma algebráicamente el segundo coeficiente con el producto anterior obtenido y se coloca esta suma algebráica en la tercera fila con su signo, se multiplica esta suma algebráica por r y se le coloca en la segunda fila debajo del tercer coeficiente, se suma algebráicamente el tercer coeficiente con el segundo producto y se coloca esta suma algebráica en la tercera fila, y así sucesivamente hasta llegar a sumar algebráicamente un producto al término independiente.

4.- Los primeros números de la tercera fila son los coeficientes del cociente que es de grado menor en una unidad que el grado del polinomio y se le llama polinomio degradado.

El último número de la tercera fila es el residuo.

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Usando la división sintética, hallar el cociente y el residuo al dividir el polinomio $f(x) = 4x^4 - 3x^2 - 7x - 2$ entre $x - 3$.

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
4 & +0 & -3 & -7 & -2 & 3 \\
 & +12 & +36 & +99 & +276 & \\
\hline
4 & +12 & +33 & +92 & +274 &
\end{array}
$$

$R = 274$

$Q(x) = 4x^3 + 12x^2 + 33x + 92$: Polinomio degradado = cociente.

2.- Determinar si $x + 2$ es un factor de: $x^3 + 4x^2 + 5x + 6$. Usando división sintética.

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & +4 & +5 & +6 & -2 \\
 & -2 & -4 & -2 & \\
\hline
1 & +2 & +1 & +4 &
\end{array}
$$

R = 4 ; No es factor.

3.- Comprobar que $x + 1$ y $x - 3$ son factores de $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ y hallar los factores restantes.

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -1 & -7 & +1 & +6 & -1 \\
 & -1 & +2 & +5 & -6 & \\
\hline
1 & -2 & -5 & +6 & 0 &
\end{array}
$$

Ejercicios

EJEMPLOS

R = 0

$Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
Polinomio degradado.

x + 1 es factor.

$$\begin{array}{rrrr|r|l}
1 & -2 & -5 & +6 & & 3 \\
 & +3 & +3 & -6 & & \\
\hline
1 & +1 & -2 & 0 & &
\end{array}$$

R = 0

$Q(x) = x^2 + x - 2$ Polinomio degradado.

x − 3 es factor.

$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$
son factores restantes

$f(x) = (x + 1)(x - 3)(x + 2)(x - 1)$
Polinomio escrito en forma factorizada.

$(x + 1)(x - 3)(x + 2)(x - 1) = 0$
Ecuación escrita en forma factorizada.

Ejercicios

EJEMPLOS

4.- Comprobar que dos de las raíces de $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$, son 1 y -2 y hallar las raíces restantes.

$$\begin{array}{rrrrr|r|l} 1 & +2 & -7 & -8 & & +12 & \;1 \\ & +1 & +3 & -4 & & -12 & \\ \hline 1 & +3 & -4 & -12 & \multicolumn{1}{|r}{} & 0 & \end{array}$$

$R = 0$

$Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$
Ecuación degradada.
1 es raíz

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +3 & -4 & -12 & \;-2 \\ & -2 & -2 & +12 & \\ \hline 1 & +1 & -6 & \multicolumn{1}{|r|}{0} & \end{array}$$

$R = 0$

$Q(x) = x^2 + x - 6 = 0$. Ecuación degradada.
-2 es raíz.

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x + 3)(x - 2) = 0$

$x_3 = -3$

$x_4 = 2$

Ejercicios

EJEMPLOS

5.- Usando el teorema del residuo hallar el valor de K que haga el polinomio $x^3 - x^2 + kx + 9$ sea divisible exactamente entre $x + 3$.

$$f(x) = x^3 - x^2 + kx + 9$$
$$f(-3) = (-3)^3 - (-3)^2 + k(-3) + 9$$
$$f(-3) = -27 - 9 - 3k + 9$$
$$f(-3) = -27 - 3k = 0$$
$$3k = -27$$
$$k = -27/3$$
$$k = -9$$

6.- Usar el teorema del residuo y hallar el valor de k para que al dividir el polinomio $x^3 + 6x^2 + kx + 1$ entre $x - 2$, el residuo sea -25.

$$f(2) = (2)^3 + 6(2)^2 + k(2) + 1$$
$$f(2) = 8 + 6(4) + 2k + 1$$
$$f(2) = 8 + 24 + 2k + 1$$
$$f(2) = 33 + 2k$$
$$33 + 2k = -25$$
$$2k = -25 - 33$$
$$2k = -58$$
$$k = -58/2$$
$$k = -29$$

Ejercicios

EJEMPLOS

7.- Usar el teorema del residuo para hallar el valor de k que haga que el polinomio $x^3 + x^2 + kx - 24$ sea divisible exactamente entre $x + 3$.

$$f(x) = x^3 + x^2 + kx - 24$$

$$f(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 + k(-3) - 24$$

$$f(-3) = -27 + 9 - 3k - 24$$

$$f(-3) = -51 + 9 - 3k$$

$$f(-3) = -42 - 3k$$

$$-42 - 3k = 0$$

$$-3k = 42$$

$$k = 42/-3$$

$$k = -14$$

8.- Hallar los valores de a y b que hagan que $x - 1$ y $x + 2$ sean factores del polinomio $x^4 + ax^3 + bx - 2$.

$$f(x) = (1)^4 + a(1)^3 + b(1) - 2$$

$$f(1) = 1 + a + b - 2$$

$$f(1) = a + b - 1$$

1) $a + b - 1 = 0$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$f(-2) = (-2)^4 + a(-2)^3 + b(-2) - 2$$

$$f(-2) = 16 - 8a - 2b - 2$$

$$f(-2) = -8a - 2b + 14$$

2) $-8a - 2b + 14 = 0$

1) $a + b - 1 = 0 \quad x2$

2) $-8a - 2b + 14 = 0 \; x1$

1) $2a + 2b - 2 = 0$

2) $-8a - 2b + 14 = 0$

$$-6a + 12 = 0$$

$-6a = -12$	$a + b - 1 = 0$
$a = -12/-6$	$2 + b - 1 = 0$
$a = 2$	$1 + b = 0$
	$b = -1$

Ejercicio # 1. Unidad No. 7

I.- **Hallar el residuo que se obtiene al dividir el polinomio dado entre el binomio de la derecha. Usando el teorema del residuo.**

1.- $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 6$ entre $x + 4$

2.- $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ entre $x - 3$

3.- $f(x) = -2x^2 - 3x + 4$ entre $x + 2$

4.- $f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 5$ entre $x - 1$

5.- $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ entre $x + 1$

6.- $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 9$ entre $x + 5$

7.- $f(x) = -3x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ entre $x + 3$

8.- $f(x) = 2x^6 - 4x^4 - 3x^2 + 1$ entre $x - 1$

II.- **Usando el teorema del factor determinar si:**

1.- $x - 3$ es un factor de $x^3 - 6x^2 + 4x - 5$

2.- $x + 1$ es un factor de $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 3$

3.- $x + 4$ es un factor de $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 24x + 144$

4.- $x + 2$ es un factor de $x^5 - x^4 - 12x^3 + 20x^2 - 5x - 3$

5.- $x + 1$ es un factor de $2x^3 + 11x^2 + 12x - 9$

III.- Si n es entero y positivo. Deterrninar si:

1.- $x^n + a^n$ es divisible exactamente entre $x + a$; n es par.

2.- $x^n + a^n$ es divisible exactamente entre $x + a$; n es impar.

3.- $x^n - a^n$ es divisible exactamente entre $x - a$; n es par.

4.- $x^n - a^n$ es divisible exactamente entre $x - a$; n es impar.

5.- $x^n + a^n$ es divisible exactamente entre $x - a$; n es par.

6.- $x^n + a^n$ es divisible exactamente entre $x - a$; n es impar.

7.- $x^n - a^n$ es divisible exactamente entre $x + a$; n es par.

8.- $x^n - a^n$ es divisible exactamente entre $x + a$; n es impar.

IV.- Hallar el cociente y residuo. Usando la división sintética. Al dividir:

1.- $f(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 3x - 1$ entre $x + 3$

2.- $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x - 4$ entre $x - 3$

3.- $f(x) = 6x^4 - 17x^3 + 2x^2 + 19x - 6$ entre $2x - 3$

4.- $f(x) = x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 24x + 144$ entre $x + 4$

5.- $f(x) = 2x - 3x + 1$ entre $x - 2$

6.- $f(x) = x^5 - 6x^3 + 2x - 3$ entre $x + 4$

7.- $f(x) = x^3 - 1$ entre $x - 1$

8.- $f(x) = x^5 + 1$ entre $x + 1$

9.- $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3x - 2$ entre $x - 2$

10.- $f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 2x + 3$ entre $x - 4$

V.- Hallar el valor que debe tener k para que al dividir el polinomio f (x) entre el binomio indicado, el residuo sea:

1.- $f(x) = x^3 - 16x^2 + kx - 4$; entre $x - 1$, el residuo sea cero.

2.- $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + kx - 1$; entre $x + 2$, el residuo sea 5.

3.- $f(x) = 3x^3 + kx^2 - 2x - 3$; entre $x - 3$, el residuo sea -3.

4.- $f(x) = x^4 + 7x^3 + 5x^2 + kx - 3$; entre $x + 3$, el residuo sea cero.

VI.- Hallar los valores de a y b en:

1.- $x^3 - bx^2 + ax + 12 = 0$, sabiendo que 3 y -1 son raíces de la ecuación.

2.- $x^3 + ax^2 + bx - 18$ es divisible exactamente entre $x - 3$ y $x + 3$.

VII.- Usando el teorema del factor determinar si:

1.- -3 es raíz de la ecuación;
$x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$

2.- 4 es raíz de la ecuación;
$x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$

3.- -1 es raíz de la ecuación; $x^3 - x - 6 = 0$

4.- -4 es raíz de la ecuación;
$x^4 + x^3 - 8x^2 + 16 = 0$

5.- $-1/2$ es raíz de la ecuación;
$2x^4 - 3x - x - 1 = 0$

VIII.- Comprobar que:

1.- -5 es una raíz de la ecuación $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ y hallar las raíces restantes.

2.- 2 y -3 son raíces de la ecuación $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0$ y hallar las raíces restantes.

3.- -4 y 1 son raíces de la ecuación $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ y hallar las raíces restantes.

4.- $(x - 1)$ y $(x + 2)$ son factores del polinomio $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ y hallar los factores restantes.

5.- $(x + 2)$ y $(2x - 1)$ son factores del polinomio $2x^4 - x^3 - 14x^2 + 5x + 6$ y hallar los factores restantes.

6.- $(3x - 1)$ y $(2x + 2)$ son factores del polinomio $6x^4 + 10x^3 + 122x^2 - 62x + 40$ y hallar los factores restantes.

7.4.- Gráfica de un Polinomio

La gráfica de un polinomio en x con coeficientes enteros es una curva contínua sin interrupciones ni vértices.

Para trazar la gráfica de un polinomio debe tenerse en cuenta las siguientes condiciones:

1.- Los puntos donde la gráfica corta al eje de las x, son las raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$.

2.- Cuando se divide el polinomio f (x) entre x – r, siendo r positivo y usando la división sintética, si todos los números en la tercera fila tienen el mismo signo o nulos, entonces la ecuación f (x) = 0 no tiene raíces mayores que r, es decir, r es una cota superior de las raíces de la ecuación f (x) = 0.

3.- Si en la división sintética de f (x) entre x – r, donde r es negativo, los números en la tercera fila alternan en signos, entonces la ecuación f (x) = 0 no posee raíces reales menores que r, es decir, r es una cota inferior de las raíces de la ecuación f (x) = 0.

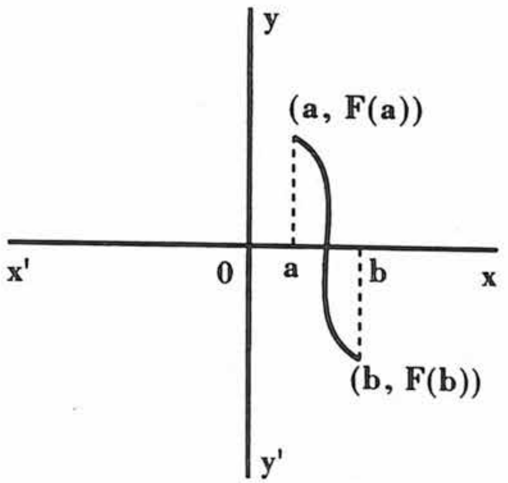
4.- Si a y b son números reales de manera que f (a) y f (b) tienen signos opuestos, entonces la gráfica del polinomio f (x) corta un número impar de veces el eje de las x entre a y b.

EJEMPLO

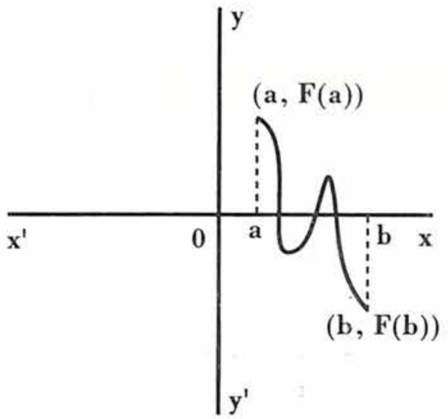
y = f (x)

f (a) = +

f (b) = –



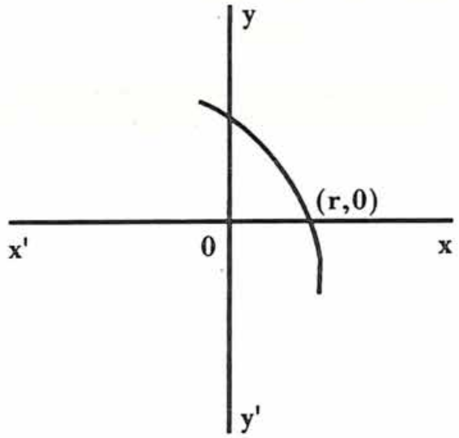
EJEMPLO



La ecuación f (x) = 0, tiene por lo menos una raíz real entre a y b o un número impar de ellas.

5.- Si r es una raíz real no repetida de la ecuación f (x) = 0, entonces la gráfica del polinomio f (x) corta el eje de x en r, pero no le es tangente en ese punto.

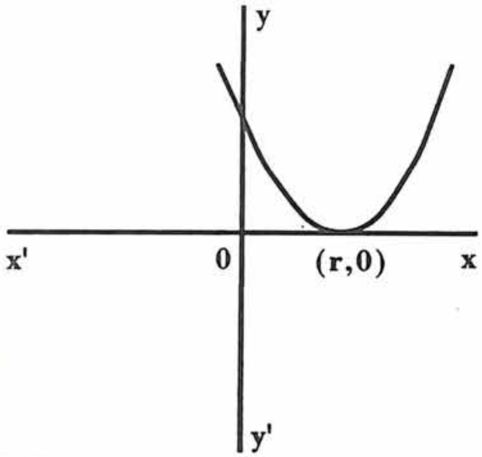
EJEMPLO



r no es repetida, multiplicidad simple; m = 1.

6.- Si r es una raíz real repetida de multiplicidad m de la ecuación f (x) = 0, si m es par, la gráfica del polinomio f (x) es tangente al eje de las x en r, pero no lo corta en ese punto.

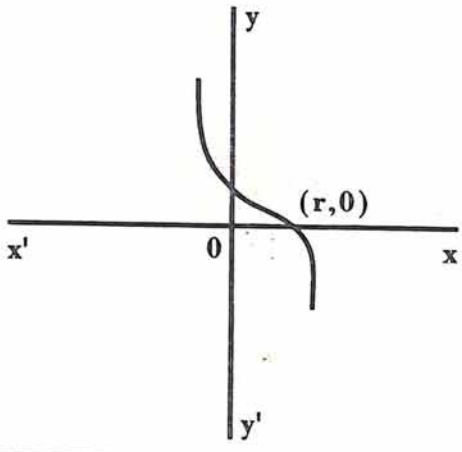
EJEMPLO



r es de multiplicidad m y m es par.

7.- Si r es una raíz real repetida de multiplicidad m de la ecuación f (x) = 0, si m es impar la gráfica del polinomio f (x) es tangente al eje de las x en r y lo corta en ese punto.

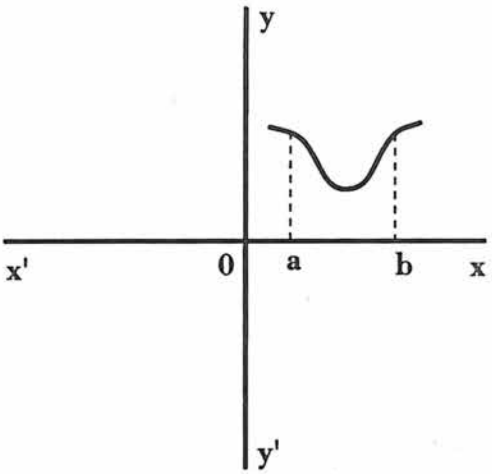
EJEMPLO

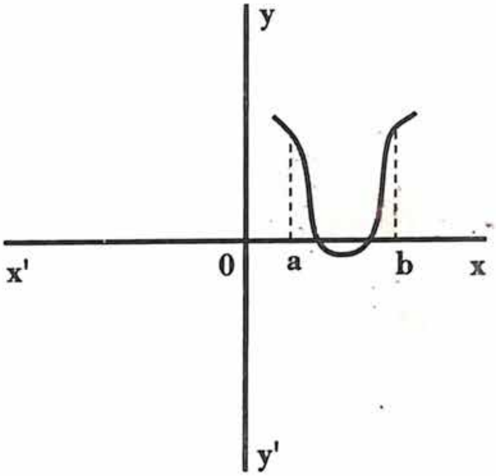


r es raíz de multiplicidad m y m es impar

8.- Si a y b son números reales de manera que f (a) y f (b) tienen el mismo signo, la gráfica del polinomio f (x) puede no cortar el eje de las x o cortarlo un número par de veces entre a y b.

EJEMPLO





7.5.- Multiplicidad

a.- Si una raíz de una ecuación no es igual a ninguna de las otras raíces, se dice que esta raíz no está repetida y es de multiplicidad simple; $m = 1$.

b.- Si dos de las raíces de una ecuación son iguales se dice que existe una raíz doble, de multiplicidad par; $m = 2$.

c.- Si tres de las raíces de una ecuación son iguales se dice que existe una raíz triple, de multiplicidad impar; $m = 3$.

d.- Si una ecuación tiene m raíces iguales a r se dice que existe una raíz r de multiplicidad m.

e.- Una raíz repetida de multiplicidad m se cuenta como m raíces.

Ejercicios

EJEMPLOS

I.- Las raíces de una ecuación son: –1, 1, 2, 4.

1.- Escribir el polinomio f (x) en forma factorizada.

$$f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 4)$$

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- Escribir la ecuación f (x) = 0 en forma factorizada.

$(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 4) = 0$

3.- ¿Cuál es la multiplicidad de cada raíz?

Todas son de multiplicidad simple; m = 1.

4.- ¿En qué punto del eje x la gráfica lo corta?

En –1, 1, 2 y 4.

5.- ¿A qué es igual f (–1), f (0), f (1), f (2), f (3), f (4)?

$f(-1) = 0,\ f(0) \neq 0,\ f(1) = 0,\ f(2) = 0,$

$f(3) \neq 0,\ f(4) = 0$

Ejercicios

EJEMPLOS

6.- Formar la ecuación.

$$(x^2 - 1)(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$\begin{array}{r}
x^2 - 6x + 8 \\
x^2 - 1 \\
\hline
x^4 - 6x^3 + 8x^2 \qquad\qquad \\
- x^2 + 6x - 8 \\
\hline
x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8
\end{array}$$

$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0$$

7.- **¿De qué grado es la ecuación?**

Es de 4° grado.

II.- Sea $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)^3 (x + 3) = 0$

1.- **¿De qué grado es la ecuación?**

De 6to. grado.

2.- **¿Cuáles son las raíces de la ecuación $f(x) = 0$?**

Las raíces son 1, –2, –3

Ejercicios

EJEMPLOS

3.- ¿ Cuál es la multiplicidad de cada raíz?

La multiplicidad de 1 es doble; m = 2.

La multiplicidad de -2 es triple; m = 3.

La multiplicidad de -3 es simple; m = 1.

4.- ¿A qué es igual $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(-3)$, $f(3)$.

$f(1) = 0$, $f(-1) \neq 0$, $f(2) \neq 0$, $f(-2) = 0$,

$f(-3) = 0$, $f(3) \neq 0$.

5.- ¿Cómo es la gráfica del polinomio $f(x)$ con respecto al eje x?

En 1 la gráfica es tangente al eje de las x, pero no lo corta; m = 2; par.

En –2 la gráfica es tangente y lo corta; m = 3.

En –3 lo corta pero no es tangente m = 1.

Ejercicios

EJEMPLOS

III.- Hacer la gráfica de $y = 2x^3 - 7x^2 - 7x + 5$

1.- Hallar $f(0) = 5$

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	–25	3	5	–7	–21	–25	–7	45

2.- Hallar f (1), f (2), f (3), f (4), hasta que los números en la tercera fila en la división sintética tengan el mismo signo.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & -7 & -7 & +5 & 1 \\
 & 2 & -5 & -12 & \\
\hline
2 & -5 & -12 & \multicolumn{1}{|r|}{-7} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & -7 & -7 & +5 & 2 \\
 & 4 & -6 & -26 & \\
\hline
2 & -3 & -13 & \multicolumn{1}{|r|}{-21} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & -7 & -7 & +5 & 3 \\
 & 6 & -3 & -30 & \\
\hline
2 & -1 & -10 & \multicolumn{1}{|r|}{-25} &
\end{array}
$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$\begin{array}{rrrr|r|l}
2 & -\ 7 & -\ 7 & & +5 & 4 \\
 & 8 & +\ 4 & & -12 & \\ \hline
2 & +\ 1 & -\ 3 & \multicolumn{1}{|r}{} & -\ 7 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r|l}
2 & -\ 7 & -\ 7 & & +5 & 5 \\
 & 10 & -\ 15 & & +40 & \\ \hline
2 & +\ 3 & +\ 8 & \multicolumn{1}{|r}{} & +45 &
\end{array}$$

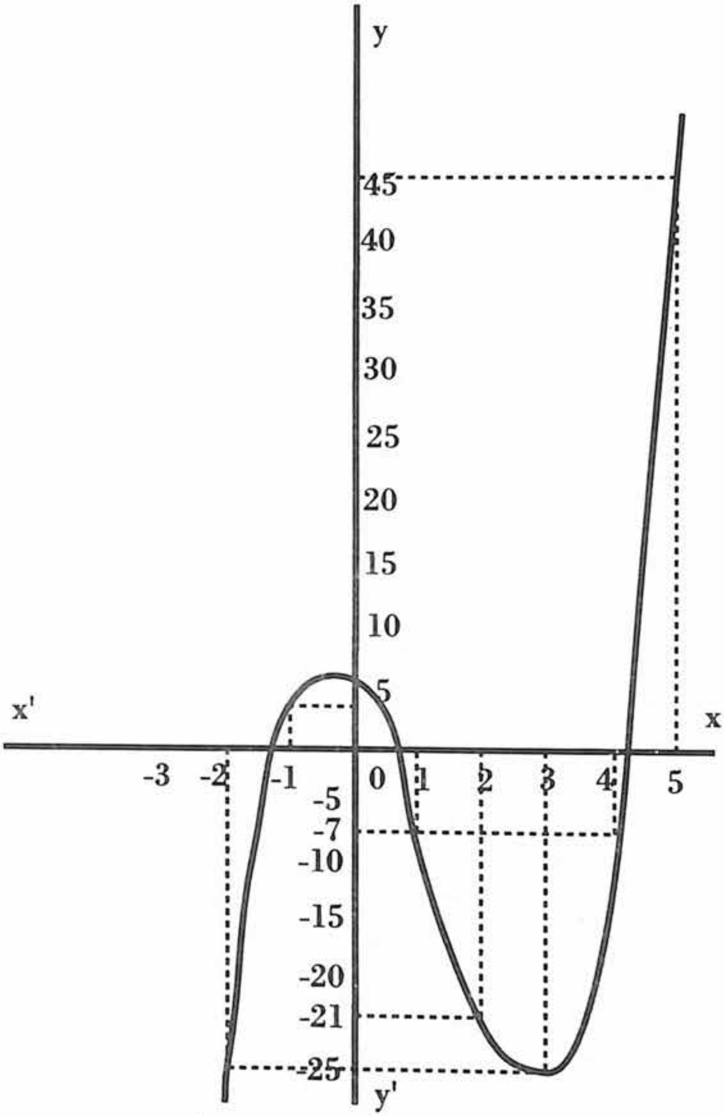
3.- Hallar f(-1), f(-2), f(-3) hasta que los números en la tercera fila de la división sintética tengan signos alternados.

$$\begin{array}{rrrr|r|l}
2 & -\ 7 & -\ 7 & & +5 & -1 \\
 & -\ 2 & +\ 9 & & -\ 2 & \\ \hline
9 & -\ 9 & +\ 2 & \multicolumn{1}{|r}{} & +\ 3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r|l}
2 & -\ 7 & -\ 7 & & +5 & -2 \\
 & -\ 4 & +\ 22 & & -30 & \\ \hline
2 & -\ 11 & +\ 15 & \multicolumn{1}{|r}{} & -25 &
\end{array}$$

Ejercicios

EJEMPLOS



7.5.1.- Observaciones

1° La gráfica corta el eje de las X entre -1 y -2, porque $f(-1) = 3$ y $f(-2) = -25$

2° La gráfica corta el eje de las X entre 0 y 1, porque $f(0) = 5$ y $f(1) = -7$.

3° La gráfica corta el eje de las X entre 4 y 5, porque $f(4) = -7$ y $f(5) = 45$.

4° La ecuación $f(x) = 0$ tiene 3 raíces reales; una entre -2 y -1; otra entre 0 y 1; otra entre 4 y 5; que son los puntos donde la gráfica del polinomio $f(x)$ corta el eje de las x.

5° La ecuación $f(x) = 0$, solo tiene tres raíces, ya que es de tercer grado.

6° Cuando se calculó $f(5)$ todos los números en la tercera fila de la división sintética son positivos, por lo tanto 5 es una cota superior de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. La ecuación no tiene una raíz real mayor que 5.

7° Cuando se calculó $f(-2)$ los números en la tercera fila de la división sintética tienen signos alternos, por lo tanto -2 es una cota inferior de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. La ecuación no tiene una raíz real menor que -2.

Para hallar los interceptos de la gráfica del polinomio $y = f(x)$.

1° Para hallar los interceptos con respecto al eje X se hace $y = 0$

2° Para hallar los interceptos con el eje Y se hace $x = 0$.

7.6.- Teorema Fundamental del Algebra

Una ecuación entera $f(x) = 0$, tiene por lo menos una raíz real o compleja.

Una ecuación entera de grado n tiene exactamente n raíces.

Si una ecuación entera $f(x) = 0$ con coeficientes reales tiene como raíz $a + bi$, su conjugado $a - bi$ también es raíz de la ecuación.

7.7.- Binomio Irracional Cuadrático

Si a y b son dos números racionales y $\sqrt{b}$ es un número irracional, entonces $a + \sqrt{b}$ es un binomio irracional cuadrático, $a - \sqrt{b}$ es su conjugado.

Si una ecuación entera $f(x) = 0$ con coeficientes racionales tiene como raíz al binomio irracional cuadrático, $a + \sqrt{b}$ su conjugado $a - \sqrt{b}$ también es raíz de la ecuación.

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Construir la ecuación entera que tiene las raíces diferentes 2 y –1, y la raíz doble 3.

$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ y\ x_3 = 3 \quad con \quad m = 2$

$$
\begin{aligned}
(x-2)(x+1)(x-3)^2 &= 0\\
(x^2-x-2)(x^2-6x+9) &= 0\\
(x^2-x-2)(x^2-6x+9) &=\\
x^4-7x^3+13x^2+3x-18 &= 0
\end{aligned}
$$

2.- Comprobar que –2 y 1 son raíces de la ecuación $x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10 = 0$, y hallar las raíces restantes.

$$
\begin{array}{rrrrr|r|l}
1 & -\ 1 & +\ 1 & +\ 9 & -10 & & -2\\
 & -\ 2 & +\ 6 & -\ 14 & +10 & & \\
\hline
1 & -\ 3 & +\ 7 & -\ 5 & & 0 &
\end{array}
$$

R = 0. –2 es la raíz

$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & +7 & -5 & \;1 \\ & +1 & -2 & +5 & \\ \hline 1 & -2 & +5 & \boxed{+0} & \end{array}$$

R = 0. 1 es raíz.

$Q(x) = x^2 - 2x + 5 = 0$

$x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,(1)\,(5)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

$$x = \frac{2 + 4i}{2} = \frac{\cancel{2}\,(1 + 2i)}{\cancel{2}} = -1 + 2i$$

$$x = \frac{2 - 4i}{2} = \frac{\cancel{2}\,(1 - 2i)}{\cancel{2}} = 1 - 2i$$

Ejercicios

EJEMPLOS

3.- Si $1 + 3i$ es una raíz de la ecuación $x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60 = 0$, hallar las raíces restantes.

$x_1 = 1 + 3i; \qquad x_2 = 1 - 3i$

$$\begin{array}{ccccc|c|l}
1 & -3 & +6 & +2 & -60 & & 1+3i \\
 & 1+3i & -11-3i & +4-18i & +60 & & \\
\hline
1 & -2+3i & -5-3i & +6-18i & 0 & &
\end{array}$$

$R = 0, \quad 1 + 3i$ es raíz.

$Q(x) = x^3 + (-2 + 3i)\,x^2 + (-5 - 3i)\,x + 6 - 18i = 0$

$$\begin{array}{cccc|c|l}
1 & -2+\cancel{3i} & -5-\cancel{3i} & +6-18i & & 1-3i \\
 & 1-\cancel{3i} & -1+\cancel{3i} & -6+18i & & \\
\hline
1 & -1 & -6 & 0 & &
\end{array}$$

$R = 0, \quad 1 - 3i$ es raíz

$Q(x) = x^2 - x - 6 = 0$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x_3 = 3$$

$$x_4 = -2$$

4.- Construir la ecuación que tiene como raíces

$1-\sqrt{5}$ y $1+3i$.

$$x_1 = 1-\sqrt{5},\ x_2 = 1+3i,$$

$$x_3 = 1+\sqrt{5},\ x_4 = 1-3i$$

$$[x-(1-\sqrt{5})][x-(1+3i)][x-(1+\sqrt{5})][x-(1-3i)]=0$$

$$(x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5})(x-1+3i) = 0$$

$$(x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5})(x-1-3i)(x-1+3i) = 0$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$
\begin{array}{llllllll}
x & - & 1 & + & \sqrt{5} & & & \\
x & - & 1 & - & \sqrt{5} & & & \\
\hline
x^2 & - & x & + & x\sqrt{5} & & & \\
 & - & x & & & + 1 - \sqrt{5} & & \\
 & & & - & x\sqrt{5} & & + \sqrt{5} & - \sqrt{25} \\
\hline
x^2 & - & 2x & & & + 1 & & - 5
\end{array}
$$

$$= (x^2 - 2x - 4)$$

$$
\begin{array}{lllllll}
x & - & 1 & - & 3i & & \\
x & - & 1 & + & 3i & & \\
\hline
x^2 & - & x & - & \cancel{3i}x & & \\
 & - & x & & & + 1 + \cancel{3i} & \\
 & & & + & \cancel{3i}x & - \cancel{3i} & -9i^2 \\
\hline
x^2 & - & 2x & & & + 1 & + 9
\end{array}
$$

$$= x^2 - 2x + 10$$

$$(x^2 - 2x - 4)(x^2 - 2x + 10) = 0$$

$$
\begin{array}{lllll}
x^2 & - 2x & - 4 & & \\
x^2 & - 2x & + 10 & & \\
\hline
x^4 & -2x^3 & -4x^2 & & \\
 & -2x^3 & +4x^2 & +8x & \\
 & & 10x^2 & -20x & - 40 \\
\hline
x^4 & - 4x & +10x^2 & -12x & - 40
\end{array}
$$

Resp. $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 40 = 0$

Ejercicio # 2. Unidad No. 7

I.- Hacer la gráfica de:

1.- $y = x^4 - 5x^2 + 4$

2.- $y = x^4 - 9x^2 + 7x + 4$

3.- $y = 3x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

4.- $y = x^3 - 4x$

5.- $y = x^3 - 4x^2 + 4x$

6.- $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

II.- Las raíces de una ecuación $f(x) = 0$ son:

$x_1 = 2, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 4$

1.- ¿De qué grado es la ecuación?

2.- Escribir el polinomio $f(x)$ en forma factorizada.

3.- Escribir la ecuación $f(x) = 0$ en forma factorizada.

4.- Formar la ecuación.

5.- ¿Cuál es la multiplicidad de cada raíz?

6.- ¿Dónde corta la gráfica de $f(x)$ el eje de las x?

III.- Las raíces de una ecuación $f(x) = 0$, son:

$$x_1 = -i, \quad x_2 = -\sqrt{2}, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 2$$

1.- ¿De qué grado es la ecuación $f(x) = 0$?
2.- Escribir el polinomio $f(x)$ en forma factorizada.
3.- Escribir la ecuación $f(x) = 0$ en forma factorizada.
4.- Formar la ecuación $f(x) = 0$
5.- ¿Cuál es la multiplicidad de cada raíz?
6.- ¿Cómo es la gráfica del polinomio $f(x)$ con respecto al eje X?

IV.- Las raíces de una ecuación $f(x) = 0$, son:

$$x_1 = 1 - i, \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

1.- ¿De qué grado es la ecuación $f(x) = 0$?
2.- Escribir el polinomi o $f(x)$ en forma factorizada.
3.- Escribir la ecuación en forma factorizada.
4.- Formar la ecuación.

V.- Las raíces de una ecuación $f(x) = 0$, son:

$x_1 = -2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1, \quad x_5 = 0$

1.- ¿De qué grado es la ecuación $f(x) = 0$?

2.- Escribir el polinomio $f(x)$ en forma factorizada.

3.- Escribir la ecuación $f(x) = 0$ en forma factorizada.

4.- Formar la ecuación $f(x) = 0$

5.- ¿Cuál es la multiplicidad de cada raíz?

6.- ¿A qué es igual $f(2)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(-3)$, $f(3)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(-4)$?

7) ¿Cómo es la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje X?

VI.- Sea la ecuación:

$f(x) = (x-3)(x+1)(x-2) = 0$

1.- ¿De qué grado es la ecuación $f(x) = 0$?

2.- ¿Cuáles son sus raíces?

3.- ¿Cuál es la multiplicidad de cada raíz?

4.- ¿Cómo es la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje X?

5.- Formar la ecuación.

VII.- Sea la ecuación $f(x) = 0$

$$(x-2)^2 (x+3)(x+1)^3 = 0$$

1.- ¿De qué grado es al ecuación?

2.- ¿Cuáles son sus raíces?

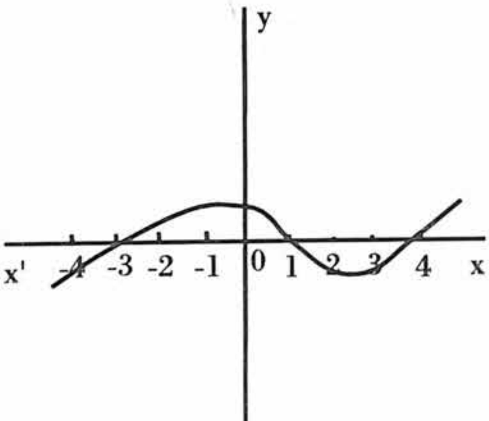
3.- ¿Cuál es la multiplicidad de cada raíz?

4.- ¿Cómo es la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje X?

5.- ¿A qué es igual $f(-2)$, $f(2)$, $f(-3)$, $f(3)$, $f(1)$, $f(-1)$?

6.- Formar la ecuación.

VIII.- La gráfica del polinomio $y = f(x)$ es:



1.- ¿De qué grado es la ecuación $f(x) = 0$?

2.- ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $f(x) = 0$?

3.- Escribir la ecuación $f(x) = 0$ en forma factorizada.

4.- Escribir el polinomio $f(x)$ en forma factorizada.

5.- ¿Cuál es la multiplicidad de cada raíz?

6.- ¿A qué es igual $f(-3)$, $f(3)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(1)$, $f(-4)$, $f(4)$?

7.- Forma la ecuación $f(x) = 0$.

IX.- Las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ son:

$x_1 = -2$, con $m = 3$; $x_2 = 1$, con $m = 2$ y $x_3 = 2$, con $m = 1$

1.- Escribir la ecuación $f(x) = 0$, en forma factorizada.

2.- ¿De qué grado es la ecuación $f(x) = 0$?

3.- ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $f(x) = 0$?

4.- ¿Cómo es la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje X?

5.- Formar la ecuación

X.- Sea $f(x) = 0$ una ecuación y:

$f(-2) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(3) = 0, \quad f(2) = 0$

1.- ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $f(x) = 0$?

2.- ¿De qué grado es la ecuación $f(x) = 0$?

3.- Escribir la ecuación $f(x) = 0$ en forma factorizada.

4.- Formar la ecuación $f(x) = 0$

Ejercicio # 3. Unidad No.7

I.- Si

a.- $2 + i$ es una raíz de la ecuación $x^4 - 16x^2 + 40x - 25 = 0$.

Hallar las raíces restantes.

b.- $2 - 2\sqrt{2}$ es una raíz de la ecuación $x^4 - 6x^3 + x^2 + 20x + 12 = 0$ y hallar las raíces restantes.

II.- Las raíces de una ecuación son:

1.- $x_1 = 2, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 4$

a.- ¿De qué grado es la ecuación?

b.- Escribir el polinomio en forma factorizada.

c.- Escribir la ecuación $f(x)=0$ en forma factorizada.

d.- Formar la ecuación.

e.- ¿Cuál es la multiplicidad de cada raíz?

2.- $x_1=-i,\ x_2=-\sqrt{2},\ x_3=-1,\ x_4=-2$

a.- ¿De qué grado es la ecuación?

b.- Escribir el polinomio $f(x)$ en forma factorizada.

c.- Escribir la ecuación $f(x)=0$ en forma factorizada.

d.- Formar la ecuación.

3.- $x_1=1-i,\quad x_2=1+\sqrt{2}$

a.- ¿De qué grado es la ecuación?

b.- Formar la ecuación.

4.- $x_1=-2,\ x_2=3,\ x_3=1,\ x_4=-1,\ x_5=0$

a.- ¿De qué grado es la ecuación?

b.- ¿Cuál es la multiplicidad de las raíces?

c.- ¿Cómo es la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje X?

d.- Formar la ecuación.

III.- Sea la ecuación:

1.- $(x - 3)(x + 1)(x - 2) = 0$

a.- ¿De qué grado es la ecuación?

b.- ¿Cuáles son sus raíces?

c.- ¿Cuál es la multiplicidad de cada raíz?

d.- Formar la ecuación.

2.- $(2x - 1)(3x + 2)(x - 4)(x + 1) = 0$

a.- ¿De qué grado es la ecuación?

b.- ¿Cuáles son sus raíces?

c.- ¿Cuál es la multiplicidad de cada raíz?

d.- Formar la ecuación.

IV.- Las raíces de una ecuación son:

$x_1 = -2$, con $m = 3$; $x_2 = 1$, con $m = 2$ y
$x_3 = 2$, con $m = 1$

a.- Escribir la ecuación en forma factorizada.

b.- ¿ De qué grado es la ecuación?

c.- ¿Cuántas raíces tiene la ecuación?

d.- ¿Cómo es la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje X?

V.- Sea la ecuación: $(x - 2)^2 (x + 3) (x + 1)^2 = 0$

a.- ¿De qué grado es la ecuación?

b.- ¿Cuáles son sus raíces?

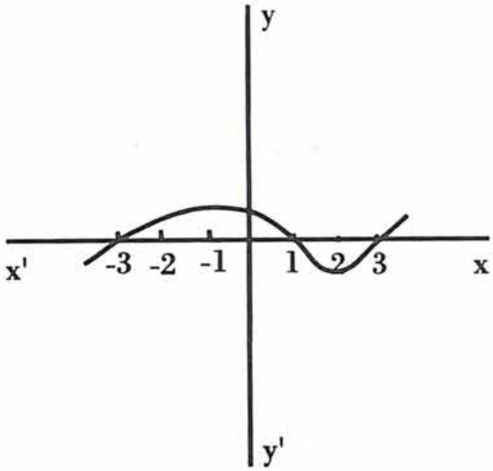
c.- ¿Cuál es la multiplicidad de cada raíz?

d.- ¿Cómo es la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje X?

e.- ¿A qué es igual: $f(-2)$, $f(2)$, $f(-3)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(1)$?

f.- Formar la ecuación.

VI.- **La gráfica de $y = f(x)$ es:**



a.- ¿De qué grado es la ecuación?

b.- ¿Cuáles son las raíces de $f(x) = 0$?

c.- Escribir la ecuación en forma factorizada.

d.- ¿Cuál es la multiplicidad de cada raíz?

e.- Forrnar la ecuación.

VII.- **Hacer la gráfica en el plano cartesiano de:**

a.- $f(x) = x^4 - 9x^2 + 7x + 4$

b.- $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

c.- $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 8$

d.- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

e.- $f(x) = x(x^2 - 4)$

f.- $f(x) = x(x - 2)^2$

7.8.- Regla de los Signos de Descartes

Con esta regla se puede determinar el número máximo de raíces positivas y negativas de una ecuación entera con coeficientes reales.

7.8.1.- Teorema (Regla de los Signos de Descartes)

Si $f(x) = 0$ es una ecuación entera con coeficientes reales y sin raíces nulas:

1° El número de raíces positivas de la ecuación $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de $f(x)$ o menor que este número en un número par.

2° El número de raíces negativas de la ecuación $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de $f(-x)$ o menor que este número en un número par.

Como observamos la Regla de los Signos de Descartes no se aplica a ecuaciones que tengan raíces nulas, por lo tanto debemos hallarlas y separarlas, para luego aplicar la regla de los signos de Descartes.

7.8.2.- Determinación de las Raíces Nulas de una Ecuación Entera f (x) = 0

1° Si una ecuación carece del término independiente pero no del término de primer grado, esta ecuación tiene una sola raíz nula.

EJEMPLO

$$x^3 + 2x^2 + x = 0$$

Tiene una raíz nula ya que no tiene término independiente pero tiene término de 1er. grado.

2° Si una ecuación entera carece del término independiente y del término de 1er. grado, pero no del término de 2do. grado, entonces la ecuación tiene 2 raíces nulas y así sucesivamente.

EJEMPLO

$$2x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 2x^2 = 0$$

Tiene 2 raíces nulas, porque carece del término independiente y del término de 1er. grado, pero no del término de 2do. grado.

La Regla de los signos de Descartes habla del número de variaciones de f (x) y del número de variaciones de f (–x), por lo tanto debemos saber que es una variación.

7.8.3.- Variación

Una variación en un polinomio $f(x)$, con coeficientes reales y sus términos ordenados según las potencias descendentes de x, es cuando dos términos consecutivos del polinomio difieren en signos.

Cuando se sustituye en un polinomio $f(x)$, a x por $-x$, se obtiene un nuevo polinomio $f(-x)$ que sólo difiere de $f(x)$ en los signos de los términos de grado impar. Si existe el término independiente se considera de grado par.

EJEMPLOS

I.- Determinar las variaciones de los siguientes polinomios.

1.- $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 15$: 4 variaciones.

2.- $f(x) = x^5 - 3x^3 - 6x^2 - 8$: 1 variación.

3.- Si $f(x) = x - 6x - 5x$, hallar las variaciones de $f(-x)$

$f(-x) = x^4 + 6x^3 + 5x$: 0 variación.

EJEMPLOS

4.- Usando la Regla de los signos de Descartes determinar la naturaleza de las raíces de las siguientes ecuaciones.

a.- $x^4 - 9x^2 - 4x + 12 = 0$

$f(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$: 2 variaciones.

$f(-x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$: 2 variaciones.

Nulas	+	–	Complejas
0	2	2	0
0	2	0	2
0	0	2	2
0	0	0	4

b.- $x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 = 0$

$$x^2 (x^3 - 2x^2 + 5x - 7) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 7 = 0$$

EJEMPLOS

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$: 3 variaciones

$f(-x) = -x^3 - 2x^2 - 5x - 7$: 0 variaciones

Nulas	+	–	Complejas
2	3	0	0
2	1	0	2

c.- $x^4 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$

$f(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + 1$: **0 variaciones**

$f(-x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$: **2 variaciones**

Nulas	+	–	Complejas
0	0	2	2
0	0	0	4

7.9.- Raíces Racionales

7.9.1.- Determinación de las Posibles Raíces Racionales de una Ecuación Entera $f(x) = 0$.

Si una fracción p/q, reducida a su mínima expresión, es una raíz de la ecuación entera $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, cuyos coeficientes son enteros o nulos y $a_0 \neq 0$ y $a_n \neq 0$, entonces p divide exactamente a a_n y q divide exactamente a a_0.

Si en la ecuación anterior $a_0 = 1$ y su término independiente $a_n \neq 0$ entonces las raíces racionales de esta ecuación son enteras y p divide exactamente a a_n.

Para obtener las raíces de una ecuación entera con coeficientes racionales se debe efectuar lo siguiente:

1° Hallar las raíces nulas y separarlas.

2° Usar la regla de los signos de Descartes para hallar la naturaleza de las raíces.

3° Determinar las posibles raíces racionales, y hacer la división sintética con estas posibles raíces racionales, para determinar si es raíz. Cuando se encuentre una raíz racional, se separa y se continúa con la ecuación degradada.

4° Después de halladas todas las raíces racionales, si todavía existe una ecuación degradada, ésta debe tener solamente raíces irracionales o complejas.

Nota: En el número 3 se debe repetir con la raíz racional encontrada para ver si tiene multiplicidad. En caso contrario se sigue el procedimiento.

EJEMPLO

I.- Dada la siguiente ecuación

$x^5 + 2x^4 - 18x^3 - 8x^2 + 41x + 30 = 0$, **Hallar:**

1.- Raíces Nulas

No tiene raíces nulas porque tiene término independiente.

2.- Naturaleza de las raíces

a.- $f(x) = x^5 + 2x^4 - 18x^3 - 8x^2 + 41x + 30$: 2 variaciones.

b.- $f(-x) = -x^5 + 2x^4 + 18x^3 - 8x^2 - 41x + 30$: 3 variaciones.

EJEMPLO

Nulas	+	–	Complejas
0	2	3	0
0	2	1	2
0	0	3	2
0	0	1	4

3.- Posibles Raíces Racionales

p/q

$p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$

$q = \pm 1$

$p/q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$

4.- Resolver la Ecuación

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & +2 & -18 & -8 & +41 & +30 & 1 \\
 & 1 & +3 & -15 & -23 & +18 & \\
\hline
1 & +3 & -15 & -23 & +18 & +48 &
\end{array}$$

$R \neq 0$, 1.no es raíz.

EJEMPLO

$$\begin{array}{rrrrrr|r|l} 1 & +2 & -18 & -8 & +41 & & +30 & \underline{-1} \\ & -1 & -1 & +19 & -11 & & -30 & \\ \hline 1 & +1 & -19 & +11 & +30 & & 0 & \end{array}$$

$R = 0, \quad -1$ es raíz

$Q(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30 = 0$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & +1 & -19 & +11 & +30 & \underline{-1} \\ & -1 & +0 & +19 & -30 & \\ \hline 1 & +0 & -19 & +30 & 0 & \end{array}$$

$R = 0 , \quad -1$ es raíz de multiplicidad doble.

$Q(x) = x^3 - 19x + 30 = 0$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +0 & -19 & +30 & \underline{-1} \\ & -1 & +1 & +18 & \\ \hline 1 & -1 & -18 & +48 & \end{array}$$

$R \neq 0$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +0 & -19 & +30 & \underline{2} \\ & +2 & +4 & -30 & \\ \hline 1 & +2 & -15 & 0 & \end{array}$$

$R = 0, \quad 2$ es raíz

EJEMPLO

$$Q(x) = x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

$$x = -5$$

$$x = 3$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = -5,\ x_5 = 3$$

II.- Dada la ecuación $2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4 = 0$. Hallar:

1.- Raíces nulas

No tiene raíces nulas porque tiene término independiente.

2.- Naturaleza de las raíces

a.- $f(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4$: 3 variaciones

b.- $f(-x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 10x - 4$: 1 variación

Nulas	+	-	Complejas
0	3	1	0
0	1	1	2

EJEMPLO

3.- Posibles raíces racionales p / q

$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$

$q = \pm 1, \pm 2$

$$\frac{p}{q} = \frac{\pm 1}{\pm 1}, \; \frac{\pm 1}{\pm 2}, \; \frac{\pm 2}{\pm 1}, \; \frac{\pm 2}{\pm 2}, \; \frac{\pm 4}{\pm 1}, \; \frac{\pm 4}{\pm 2}$$

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \; \pm\frac{1}{2}, \; \pm 2, \; \pm 4$$

4.- Resolver ecuación:

$$\begin{array}{rrrrr|r|l}
2 & -1 & -4 & +10 & -4 & & 1/2 \\
 & +1 & +0 & -2 & +4 & & \\
\hline
2 & 0 & -4 & +8 & 0 & &
\end{array}$$

R = 0 1/2 es raíz.

$$Q(x) = 2x^3 - 4x + 8 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & +0 & -4 & +8 & 1/2 \\
 & +1 & +1/2 & -7/4 & \\
\hline
2 & +1 & -7/2 & +25/4 &
\end{array}$$

$R \neq 0$, 1/2 no tiene multiplicidad.

EJEMPLO

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 2 & + & 0 & - & 4 & + & 8 & \underline{-1/2} \\ & - & 1 & + & 1/2 & + & 7/4 & \\ \hline 2 & - & 1 & - & 7/2 & \multicolumn{2}{|r|}{+\,39/4} & \end{array}$$

R ≠ 0, –1/2 no es raíz

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 2 & + & 0 & - & 4 & + & 8 & \underline{1} \\ & + & 2 & + & 2 & - & 2 & \\ \hline 2 & + & 2 & - & 2 & \multicolumn{2}{|r|}{+\,6} & \end{array}$$

R ≠ 0, 1 no es raíz

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 2 & + & 0 & - & 4 & + & 8 & \underline{-1} \\ & - & 2 & + & 2 & + & 2 & \\ \hline 2 & - & 2 & - & 2 & \multicolumn{2}{|r|}{+\,10} & \end{array}$$

R ≠ 0, –1 no es raíz.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 2 & + & 0 & - & 4 & + & 8 & \underline{2} \\ & + & 4 & + & 8 & + & 8 & \\ \hline 2 & + & 4 & + & 4 & \multicolumn{2}{|r|}{+\,16} & \end{array}$$

R ≠ 0, 2 no es raíz

EJEMPLO

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l} 2 & + & 0 & - & 4 & + & 8 & & & -2 \\ & - & 4 & + & 8 & - & 8 & & & \\ \hline 2 & - & 4 & + & 4 & & 0 & & & \end{array}$$

$R = 0$, -2 es raíz

$$2x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\ (1)\ (2)}}{2\ (1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$x_3 = \frac{2 + 2i}{2} = \frac{\cancel{2}\ (1 + i)}{\cancel{2}} = 1 + i$$

$$x_4 = \frac{2 - 2i}{2} = \frac{\cancel{2}\ (1 - i)}{\cancel{2}} = 1 - i$$

Las raíces son:

$x_1 = 1/2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1 + i$, $x_4 = 1 - i$

Nota: Cuando la suma de los coeficientes de una ecuación es cero, entonces la ecuación tiene a 1 como raíz.

Ejercicio #4. Unidad No. 7

I.- Determine las variaciones en los siguientes polinomios.

a.- $f(x) = 2x^4 - 6x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

b.- $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 1$

c.- $f(x) = 4x^6 - 2x^5 - 3x^3 + 2x + 4$

II.- Usando la regla de los signos de Descartes determinar la naturaleza de las raíces de las siguientes ecuaciones.

a.- $x^4 + 2x^3 - 43x^2 - 24x + 144 = 0$

b.- $x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0$

c.- $2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0$

d.- $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 = 0$

e.- $x^5 - 7x^3 + 6x^2 = 0$

f.- $x^5 - 15x^3 + 2x^2 + 11x + 6 = 0$

III.- Determinar las posibles raíces racionales de:

a.- $2x^3 + x^2 - 4x - 3 = 0$

b.- $x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 120 = 0$

c.- $x^3 + 1 = 0$

d.- $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$

e.- $x^3 - 8 = 0$

f.- $x^5 - 8x^4 + 25x^3 - 38x^2 + 28x - 8 = 0$

IV.- Dadas las siguientes ecuaciones, hallar las raíces nulas, naturaleza de las raíces , posibles raíces racionales. Resolver la ecuación.

1.- $x^4 + 5x^3 + 4x^2 = 0$

2.- $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = 0$

3.- $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x = 0$

4.- $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

5.- $9x^5 - 9x^4 - x^3 + x^2 = 0$

6.- $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

7.- $4x^4 - 9x^3 + x^2 + 2x = 0$

8.- $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$

9.- $x^5 + x^4 + x^3 - 9x^2 - 10x = 0$

10.- $x^6 - 10x^5 + 37x^4 - 60x^3 + 36x^2 = 0$

7.10.- Transformaciones de Ecuaciones

1° Si a partir del segundo término se multiplica sucesivamente los coeficientes de la ecuación entera (1) $a_0x^n + a^1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ por m, m^2, m^3, ..., m^n. La ecuación (1) se se transforma en otra cada una de cuyas raíces es igual a m veces la raíz correspondiente de la ecuación (1).

Cuando $m = -1$, las raíces de la nueva ecuación tienen igual valor absoluto que la de la ecuación (1), pero con signos contrarios.

En esta transformación hay que tener en cuenta las potencias de x que no existen en la ecuación, considerar esos términos con coeficientes nulos.

EJEMPLO

1.- Transforma la ecuación (1) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$, en otra cada una de cuyas raíces sea igual al triple de la raíz correspondiente de la ecuación dada.

(1) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$; $m = 3$

$$x^3 + (3)(3x^2) + (3)^2(-4x) + (3)^3(-12) = 0$$

(2) $x^3 + 9x^2 - 36x - 324 = 0$

$$x^3 + 9x^2 - 36x - 324 = 0$$

Esta ecuación (2) tiene las raíces de (1) multiplicadas por 3.

EJEMPLO

Si deseamos comprobar el resultado debemos resolver la ecuación (1) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ y la ecuación (2).

1.- No tiene raíces nulas

2.- Naturaleza de las raíces

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0 : 1 \text{ variación}$$

$$f(-x) = -x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0 : 2 \text{ variaciones}$$

Nulas	+	–	Complejas
0	1	2	0
0	1	0	2

3.- Posibles raíces racionales: p/q

$p = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12$

EJEMPLO

4.- Resolver la ecuación

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
1 & + & 3 & - & 4 & - & 12 & 1 \\
 & & 1 & + & 4 & & 0 & \\
\hline
1 & + & 4 & & 0 & \multicolumn{1}{|r}{-} & 12 &
\end{array}$$

$R \neq 0$, 1 no es raíz

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
1 & + & 3 & - & 4 & - & 12 & -1 \\
 & & 1 & + & 4 & & 0 & \\
\hline
1 & + & 4 & & 0 & \multicolumn{1}{|r}{-} & 12 &
\end{array}$$

$R \neq 0$, -1 no es raíz

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
1 & + & 3 & - & 4 & - & 12 & 2 \\
 & & 2 & + & 10 & + & 12 & \\
\hline
1 & + & 5 & + & 6 & \multicolumn{1}{|r}{} & 0 &
\end{array}$$

$R = 0$, 2 es raíz

$$\begin{aligned}
Q(x) = x^2 + 5x + 6 &= 0 \\
(x+2)(x+3) &= 0 \\
x_2 &= -2 \\
x_3 &= -3
\end{aligned}$$

Las raíces de la ecuación (1) son: 2, –2, –3

Las raíces de la ecuación (2) deben ser: 6, –6, –9

EJEMPLO

Resolver la ecuación (2)

$$x^3 + 9x^2 - 36x - 324 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr|r|l} 1 & +9 & -36 & -324 & 6 \\ & +6 & +90 & +324 & \\ \hline 1 & +15 & +54 & 0 & \end{array}$$

R = 0, 6 es raíz

$$Q(x) = x^2 + 15x + 54 = 0$$

$$(x + 9)(x + 6) = 0$$

$$x_2 = -9$$

$$x_3 = -6$$

Las raíces de la ecuación (2) son: 6, –9, –6

2° Sea la ecuación (1) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$; esta ecuación se puede transformar en la ecuación (2) $a_ox^n + R_1x^{n-1} + R_2x^{n-2} + \ldots + R_{n-1}x + R_n = 0$ cada una de cuyas raíces es h unidades menor que la raíz correspondiente de la ecuación (1).

Los coeficientes R_1, R_2, ..., R_{n-1}, R_n se calcula de la siguiente manera:

1° Se divide el polinomio f (x) entre x – h, siendo el residuo R_n.

2° Se divide el cociente entre x – h, siendo el residuo R_{n-1}

3° Se continúa este proceso hasta efectuar n divisiones.

4° El último residuo es R_1.

Si la transformación que se desea es aumentar las raíces de una ecuación en h unidades las divisiones se deben hacer entre x + h.

EJEMPLO

1.- **Hallar la ecuación cuyas raíces sean tres unidades menor que la raíz correspondiente de**

(1) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0.$

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +3 & -4 & -12 & \underline{\ 3\ } \\
 & +3 & +18 & +42 & \\
\hline
1 & +6 & +14 & \multicolumn{1}{|r|}{+30} & \\
 & +3 & +27 & & \\
\cline{1-3}
1 & +9 & \multicolumn{1}{|r}{+41} & & \\
 & +3 & & & \\
\cline{1-2}
1 & \multicolumn{1}{|r}{+12} & & &
\end{array}$$

$h = 3$

$R_3 = 30$

$R_{3-1} = R_2 = 41$

$R_1 = 12$

(2) $x^3 + 12x^2 + 41x + 30 = 0$

EJEMPLO

COMPROBACION

En el ejercicio anterior obtuvimos las raíces de la ecuación (1), son 2, –2, –3.

Las raíces de la ecuación (2) deben ser –1, –5, –6.

Resuelvo la ecuación (2) y compruebo que éstas son las raíces.

$$\begin{array}{rrrr|r|l} 1 & +12 & +41 & & +30 & -1 \\ & -1 & -11 & & -30 & \\ \hline 1 & +11 & +30 & \multicolumn{1}{|r}{} & 0 & \end{array}$$

$R = 0$

$Q(x) = x^2 + 11x + 30 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 + 11x + 30 &= 0 \\ (x+6)(x+5) &= 0 \\ x_2 &= -6 \\ x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Las raíces de la ecuación (2) son –1, –6, –5

Ejercicios

Ejemplos

1.- **Transformar la ecuación (1) $18x^4 - 27x^3 + 52x^2 + 40x - 8 = 0$, en otra cada una de cuyas raíces sea igual a las de la ecuación (1) multiplicada por el menor número que haga que el coeficiente principal de la nueva ecuación sea la unidad y que los coeficientes restantes sean enteros.**

$$x^4 + \frac{27}{18}x^3 + \frac{52}{18}x^2 + \frac{40}{18}x - \frac{8}{18} = 0$$

$$x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{26}{18}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{4}{9} = 0$$

$$x^4 + (6)\left(-\frac{3}{2}x^3\right) + \left(6^2\right)\left(\frac{26}{18}x^2\right) +$$

$$\left(6^3\right)\left(\frac{20}{9}x\right) + \left(6^4\right)\left(-\frac{4}{9}\right) = 0$$

(2) $x^4 - 9x^3 + 104x^2 + 480x - 576 = 0$

La ecuación (2) es la ecuación transformada cuyo coeficiente principal es la unidad y los demás coeficientes son enteros, y sus raíces son cada una seis veces la raíz correspondiente de la ecuación (1).

6 es el menor número que satisface la condición pedida.

Ejercicios

EJEMPLOS

COMPROBACION

Resuelvo la ecuación

$$(1)\quad 18x^4 - 27x^3 + 52x^2 + 40x - 8 = 0$$

1.- Raíces nulas no tiene.

2.- Naturaleza de las raíces.

$f(x) = 18x^4 - 27x^3 + 52x^2 + 40x - 8$: 3 variaciones.

$f(-x) = 18x^4 + 27x^3 + 52x^2 - 40x - 8$: 1 variación.

Nulas	+	–	Complejas
0	3	1	0
0	1	1	2

3.- Posibles raíces racionales

$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$

Ejercicios

EJEMPLOS

COMPROBACION

$$\frac{p}{q}=\frac{\pm 1}{\pm 1},\ \frac{\pm 1}{\pm 2},\ \frac{\pm 1}{\pm 4},\ \frac{\pm 1}{\pm 8}$$

$$\frac{p}{q}=\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{8},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{6},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{rrrr|r|l}
18 & -27 & +52 & +40 & -8 & -2/3 \\
 & -12 & +26 & -52 & +8 & \\
\hline
18 & -39 & +78 & -12 & 0 &
\end{array}$$

R = 0, –2/3 es raíz.

$Q(x) = 18x^3 - 39x^2 + 78x - 12 = 0.$

Ecuación Degradada.

$$\begin{array}{rrrr|l}
18 & -39 & +78 & -12 & 1/6 \\
 & +3 & -6 & +12 & \\
\hline
18 & -36 & +72 & 0 &
\end{array}$$

R = 0, 1/6 es raíz.

$Q(x) = 18x^2 - 36x + 72 = 0.$

Ecuación Degradada.

Ejercicios

EJEMPLOS

COMPROBACION

$18x^2 - 36x + 72 = 0$ (divide entre 18)

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,(1)\,(4)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}\ i}{2}$$

$$x = \frac{2\left(1 \pm \sqrt{3}\ i\right)}{2}$$

$$x = 1 + \sqrt{3}\ i$$

Las raíces de la ecuación 1 son:

$$-\frac{2}{3},\ \frac{1}{6},\ 1 + \sqrt{3}\ i,\ 1 - \sqrt{3}\ i$$

Ejercicios

EJEMPLOS

COMPROBACION

Las raíces de la ecuación (2) deben ser:

$$-\frac{1}{2}\times 6=-4;\ \frac{1}{6}\times 6=-1;$$

$$\left(1+\sqrt{3}\ \ i\right)=6+6\sqrt{3}\ \ i;$$

$$\left(1-\sqrt{3}\ \ i\right)\left(6\right)=6-6\sqrt{3}\ \ i$$

Resolver la ecuación

$$(2)\ x^4-9x^3+104x^2+480x-576=0$$

1	− 9	+ 104	+ 480	− 574	−4
	− 4	+ 52	− 624	+ 574	
1	− 13	+ 156	− 144	0	

R = 0, −4 es raíz.

$Q(x)=x^3-13x^2+156x-144=0.$

Ecuación Degradada.

Ejercicios

EJEMPLOS

COMPROBACION

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -13 & +156 & -144 & 1 \\ & +1 & -12 & +144 & \\ \hline 1 & -12 & +144 & 0 & \end{array}$$

$R = 0,\quad$ 1 es raíz

$Q(x) = x^2 - 12x + 144 = 0$. **Ecuación Degradada.**

$$x^2 - 12x + 144 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4(144)}}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 576}}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 \times 3}\ i}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm 12\sqrt{3}\ i}{2}$$

$$x = \frac{12\left(1 \pm \sqrt{3}\ i\right)}{2}$$

$$x = 6 + 6\sqrt{3}\ i$$

Ejercicios

EJEMPLOS

COMPROBACION

Las raíces de la ecuación (2) son:

$-4,\ 1,\ 6+6\sqrt{3}\ i,\quad 6-6\sqrt{3}\ i,$

Ejercicio # 5. Unidad No. 7

I.- **Transformar las siguientes ecuaciones en otras cada una de cuyas raíces estén multiplicadas por el número de la derecha y hacer la comprobación.**

1.- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0\ ;\ m = 2$

2.- $36x^4 - 36x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0\ ;\ m = 3$

3.- $x^4 - 13x^2 - 36 = 0\ ;\ m = 4$

4.- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0\ ;\ m = 5$

II.- Transformar las siguientes ecuaciones en otras cada una de cuyas raíces esta disminuída en el número de la derecha y hacer la comprobación.

1.- $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; $h = 3$

2.- $x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = 0$; $h = 4$

3.- $9x^4 - 9x^3 - 181x^2 + x + 20 = 0$; $h = -3$

4.- $x^5 + x^4 + x^3 - 9x^2 - 10x = 0$; $h = 2$

7.11.- Relaciones Entre las Raíces de una Ecuación y los Coeficientes

1.- Si tenemos una ecuación de 2do. grado y sus raíces son r_1 y r_2, la podemos escribir en forma factorizada de la siguiente manera:

$$(x - r_1)(x - r_2) = 0$$

Efectuando:

$$\begin{array}{rrrr}
x - r_2 & & & \\
x - r_2 & & & \\
\hline
x^2 - r_1x & & & \\
 & - r_2x & + r_1r_2 & \\
\hline
x^2 - r_1x & - r_2x & + r_1r_2 &
\end{array}$$

$$x^2 - (r_1 + r_2)\,x + r_1r_2 = 0$$

2.- Si la ecuación es de 3er. grado y sus raíces son r_1, r_2, r_3 , la podemos escribir en forma factorizada de la siguiente manera:

$$(x - r_1)\,(x - r_2)\,(x - r_3) = 0$$

Efectuando:

$$(x^2 - r_1x - r_2x + r_1r_2)\,(x - r_3) = 0$$

$$\begin{array}{r}
x^2 - r_1x - r_2x + r_1r_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
x - r_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
x^3 - r_1x^2 - r_2x^2 + r_1r_2x \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\\
- r_3x^2 + r_1r_3x + r_2r_3x - r_1r_2r_3 \\
\hline
x^3 - r_1x^2 - r_2x^2 + r_1r_2x - r_3x^2 + r_1r_3x + r_2r_3x - r_1r_2r_3
\end{array}$$

$$x^3 - r_1x^2 - r_2x^2 + r_1r_2x - r_3x^2 + r_1r_3x + r_2r_3x - r_1r_2r_3 = 0$$

Agrupando términos semejantes:

$$x^3 - (r_1x^2 + r_2x^2 + r_3x^2) + (r_1r_2x + r_1r_3x + r_2r_3x) - r_1r_2r_3$$

Sacando factor común:

$$x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)\,x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)\,x - r_1r_2r_3 = 0$$

Se observa lo siguiente:

1° El coeficiente principal es la unidad.

2° El coeficiente de segundo (2do.) término es igual a la suma de las raíces con signos contrarios.

3° El coeficiente del tercer (3er.) término es igual a la suma de los productos de las raíces tomadas de dos en dos, con igual signo.

4° El coeficiente del cuarto (4to.) término es igual a la suma de los productos de las raíces tomadas de tres en tres con signo contrario y así sucesivamente.

5° El último término es igual al producto de todas las raíces con su misrno signo si la ecuación es de grado par, y con signos distintos si la ecuación es de grado impar.

Estas observaciones son válidas si el coeficiente principal es igual a la unidad.

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- Resolver la ecuación $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$, sabiendo que una de las raíces es el negativo de la otra.

Las raíces las represento por:

$$x_1, \quad -x_1 \quad y \quad x_2$$

Dividiendo entre dos:

$$x^3 - 1/2x^2 - 9x + 9/2 = 0$$

Sumo las raíces y las igualo al coeficiente del 2do. término con signo contrario.

$$x_1 - x_1 + x_2 = 1/2$$

$$x_2 = 1/2$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -1 & -18 & +9 & 1/2 \\ & +1 & +0 & -9 & \\ \hline 2 & +0 & -18 & 0 & \end{array}$$

R = 0, 1/2 es raíz

Ejercicios

EJEMPLOS

$$Q(x) = 2x^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = \frac{18}{2}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = -3$$

2.- Las raíces de la ecuación $x^3 - 3x^2 + kx + 8 = 0$ en determinado orden están en progresión aritmética. Hallar las raíces y el valor de k.

Las raíces las represento por:

$$x - d, \quad x, \quad x + d$$

$$x - d + x + x + d$$

$$3x = 3$$

$$x = \frac{3}{3}$$

$$x = 1$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + kx + 8 = 0$$

$$f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + k(1) + 8$$

$$f(1) = 1 - 3 + k + 8$$

$$f(1) = 6 + k$$

$$6 + k = 0$$

$$k = -6$$

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & -6 & +8 & 1 \\ & 1 & -2 & -8 & \\ \hline 1 & -2 & -8 & 0 & \end{array}$$

$R = 0$, 1 es raíz

$$Q(x) = x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = -2$$

Ejercicios

EJEMPLOS

3.- Formar la ecuación usando las relaciones entre las raíces y los coeficientes.

1.- $x_1 = 2$

2.- $x_2 = -2$

3.- $x_3 = 1$

$$\cancel{2} - \cancel{2} + 1 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$(2)(-2) + (2)(1) + (-2)(1) =$$

$$-4 + 2 - 2 = -4$$

$$(2)(-2)(1) = -4$$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

Ejercicio # 6. Unidad No. 7

I.- Formar la ecuación usando las relaciones entre las raíces y los coeficientes.

a.- $x_1 = -3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -1$

b.- $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$

c.- $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - 2i$

d.- $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2 = 3 - \sqrt{2}$

e.- $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 2 - 2i$

II.- Usando las relaciones entre las raíces y los coeficientes. Efectuar.

a.– Las raíces de la ecuación $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ en determinado orden están en progresión geométrica. Hallar las raíces.

b.- Las raíces de la ecuación en determinado orden estan en progresión aritmética.. Hallar las raíces.$x^3 - 15x^2 + 66x - 80 = 0$.

c.- Dos de las raíces de $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ son opuestas. Resolver la ecuación.

d.- Una de las raíces de $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ es el triple de otra. Hallar las raíces.

e.- Una de las raíces de $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ es 2 unidades mayor que otra. Hallar las raíces.

f.- Las raíces de la ecuación $x^3 - 3x^2 + kx + 3 = 0$ están en determinado orden en progresión aritmética. Hallar las raíces y el valor de k.

g.- Las raíces de la ecuación $3x^3 - 13x^2 + kx - 3 = 0$ en determinado orden están en progresión geométrica. Hallar k y las raíces.

h.- Resolver la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, si el cociente de dos de sus raíces es 3.

i.- Resolver la ecuación $4x^4 + 28x^3 + 33x^2 - 56x + 16 = 0$ sabiendo que tiene dos raíces dobles.

j.- Resolver la ecuación $9x^4 - 63x^3 + 5x^2 + 7x - 6 = 0$ si una raíz es el número negativo de otra.

7.12.- Logaritmos. "Repaso".

El logaritmo de un número positivo en una base dada es igual al exponente al que hay que elevar la base para obtener el número.

EJEMPLOS

1.- $\log_3 9 = 2$	$3^2 = 9$
2.- $\log_{10} 1000 = 3$	$10^3 = 1000$
3.- $\log_{10} 0.01 = -2$	$10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = 0$

Los números positivos son los que tienen logaritmos reales.

Los logaritmos de los números negativos no existen, en el conjunto de los números reales. Estos son números complejos.

El logaritmo de cero no está definido.

Ejercicios

EJEMPLOS

I.- Hallar el valor de la letra que se especifica.

1.- $\log_3 81 = x$

$$3^x = 81$$

$$3^x = 3^4$$

$$x = 4$$

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- $\log_x \frac{1}{32} = 5$

$$x^5 = \frac{1}{32}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{32}}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

3.- $\log_4 x = -3$

$$4^{-3} = x$$

$$x = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$x = \frac{1}{64}$$

II.- Expresa en forma logarítmica

1.- $5^3 = 125$; $\log_5 125 = 3$

2.- $3^2 = 9$; $\log_3 9 = 2$

3.- $a^x = b$; $\log_a b = x$

Ejercicios

EJEMPLOS

4.- $4^{-2} = \frac{1}{16}$; $\log_4 \frac{1}{16} = -2$

5.- $R^P = Q$; $\log_R Q = P$

III.- Expresa en forma exponencial

1.- $\log_4 64 = 3$; $4^3 = 64$

2.- $\log_b x = c$; $b^c = x$

3.- $\log_{1/2} \frac{1}{8} = 3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

4.- $\log_c d = e$; $c^e = d$

7.12.1.- Propiedades Fundamentales de los Logaritmos

1° El logaritmo de un producto de dos o más números positivos es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

EJEMPLO

1.- $\log_c a \,.\, b = \log_c a + \log_c b$

2.- $\log_c (4 \times 5 \times 12) = \log_c 4 + \log_c 5 + \log_c 12$

2° El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

EJEMPLOS

1.- $\log_c \dfrac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

2.- $\log_a \dfrac{54}{14} = \log_a 54 - \log_a 14$

3.- $\log_a \dfrac{4\times 5\times 6}{2\times 3} = \log_a 4 + \log_a 5 + \log_a 6$

$-\log_a 2 - \log_a 3$

4.- $\log_a \dfrac{(x+y)(x-y)}{p(m+n)} = \log_a (x+y) + \log_a (x-y)$

$-\log_a P - \log_a (m+n)$

3° El logaritmo de una potencia de un número positivo es igual al logaritmo de dicho número multiplicado por el exponente de la potencia.

EJEMPLOS

1.- $\log_c a^m = m \log_c a$

2.- $\log_a 5^4 = 4 \log_a 5$

3.- $\log_a \dfrac{6^4 . 3^5}{2^7 . 8^9} = 4 \log_a 6 + 5 \log_a 3 - 7 \log_a 2 - 9 \log_a 8$

4.- $$\log_a \frac{(x+y)^5 (x-y)^6}{3(m+n)^4 (m-n)^7} = 5 \log_a (x+y)$$

$$+6 \log_a (x-y)$$

$$-\log_a 3 - 4 \log_a (m+n)$$

$$-7 \log_a (m-n)$$

4° El logaritmo de una raíz de un número positivo es igual al logaritmo de la cantidad subradical entre el índice de la raíz.

EJEMPLOS

1.- $\log_b \sqrt[m]{a} = \dfrac{\log_b a}{m}$

2.- $\log \sqrt[8]{30} = \dfrac{\log 30}{8}$

3.- $\log \sqrt[9]{\dfrac{3(x+2)^5(x-3)^6}{4c^2y^3(x+y)^7}}$

$$= \frac{\log 3 + 5\log(x+2) + 6\log(x-3)}{9}$$

$$-\left[\frac{\log 4 + 2\log c + 3\log y + 7\log(x+y)}{9}\right]$$

7.12.2.- Otras Propiedades de los Logaritmos

1° En cualquier sistema el logaritmo de la base es igual a 1.

EJEMPLO

$$\log_b b = 1$$

2° En cualquier sistema el logaritmo de la base elevado a un exponente, es igual al exponente.

EJEMPLO

$$\log_b b^n = n$$

3° En cualquier sistema la base elevado al logaritmo en esa misma base de un número, es igual al número.

EJEMPLO

$$b^{\log_b n} = n$$

7.12.3.-Sistemas de Logaritmos

Existen dos sistemas de logaritmos que se usan frecuentemente llamados: Sistema de Logaritmo Base 10 y Sistema de Logaritmo de Base e.

7.12.3.1.- Sistema de Logaritmo Base 10

El sistema de logaritmo base 10 es llamado Logaritmos Vulgares, Decimal, Común o de Briggs y se usa para hacer los cálculos numéricos y se representa por log.

7.12.3.2.- Sistema de Logaritmo de Base e

El sistema de logaritmo de base *e* es llamado Logaritmos Naturales o Neperianos y su mayor uso está en el análisis, cálculo diferencial e integral, en matemática superior.

e = 2.71828 ... y se representa por In

$$e = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.71828\ \ldots$$

Ejercicios

EJEMPLOS

I.- Expresar las siguientes expresiones como un solo logaritmo:

1.- $\log_z m - \log_z n = \log_z \frac{m}{n}$

2.- $3\log_a x - 2\log_a y = \log_a \frac{x^3}{y^2}$

Ejercicios

EJEMPLOS

3.- $$\frac{4\log_a(x+y)+3\log_a(x-y)}{7}$$

$$-\left[\frac{2\log_a(m+n)+3\log_a(m-n)}{7}\right]$$

$$=\log_a\sqrt[7]{\frac{(x+y)^4(x-y)^3}{(m+n)^2(m-n)^3}}$$

7.12.4.- Función Exponencial

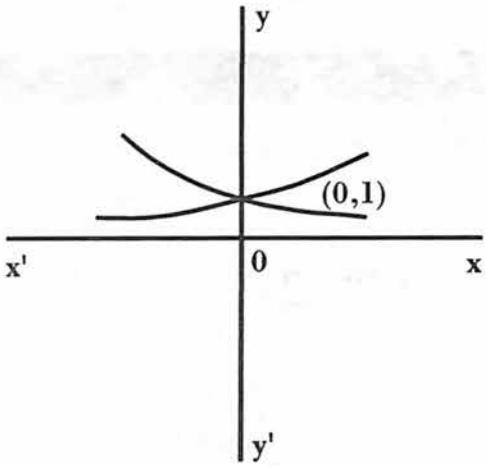
Una función exponencial es aquella que tiene la forma $y = b^x$, donde b es una constante: $b > 0$.

La curva cuya ecuación es $y = b^x$ se llama curva exponencial y tiene las propiedades siguientes:

1° La curva pasa por el punto (0, 1)

2° La curva está sobre el eje de las x (y siempre es positiva), y tiene al eje x como asintota (tangente en el infinito).

EJEMPLOS



Gráfica de (1) $y = 2^x$: $b > 1$

$y = b^x$

$y = 2^0 = 1$

$y = 2^1 = 2$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

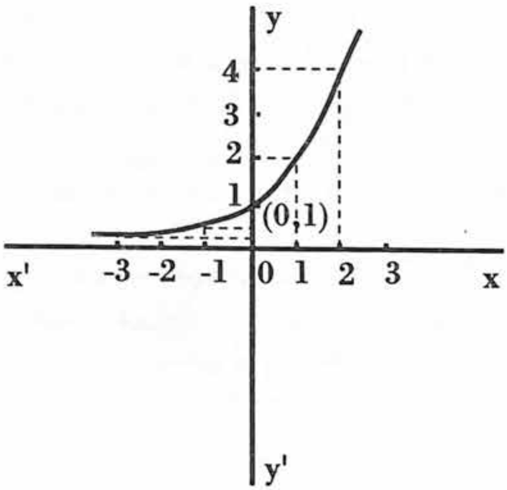
$y = 2^2 = 4$

$y = 2^3 = 8$

$y = 2^{-1} = 1/2$

$y = 2^{-2} = 1/4$

$y = 2^{-3} = 1/8$



La gráfica es una curva contínua.

EJEMPLOS

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $b < 1$

x	–2	–1	0	1	2
y	4	2	1	1/2	1/4

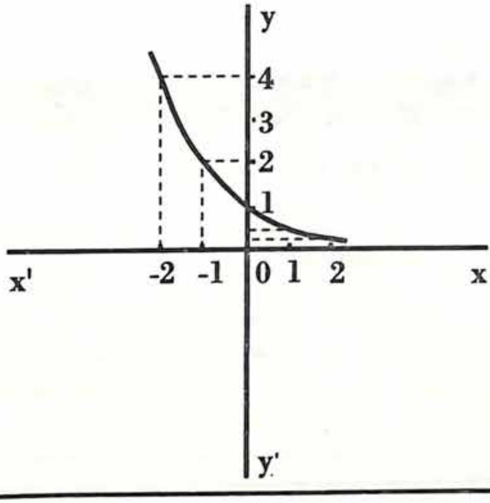
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

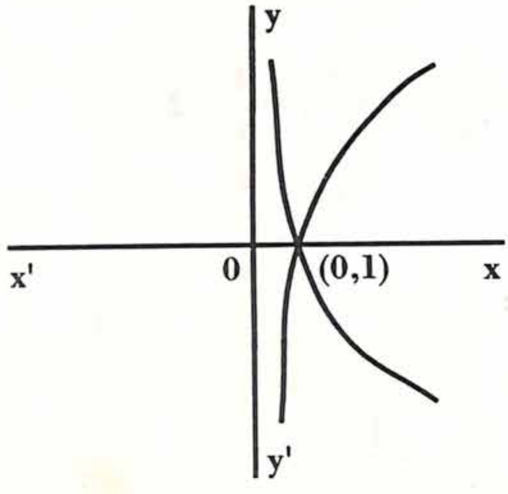


7.12.5.- Función Logarítmica: $y = \log_b x$; $b > 0$

Sus propiedades son las siguientes:

1° La curva pasa por el punto (1, 0)

2° La curva se encuentra a la derecha del eje "y" , y tiene al eje "y" como asíntota.



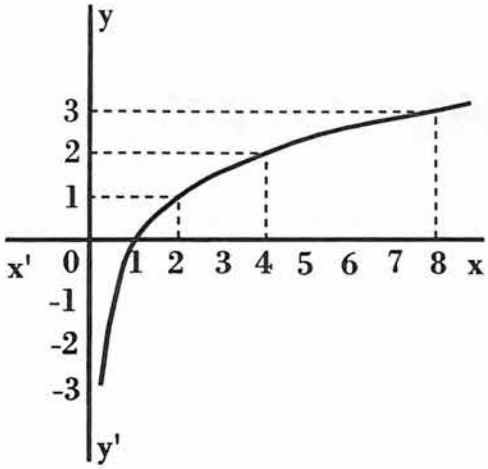
EJEMPLO

Trazar la gráfica de (1) $y = \log_2 x$; $b > 1$

Solución:

x	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8
y	3	2	1	0	–1	–2	–3

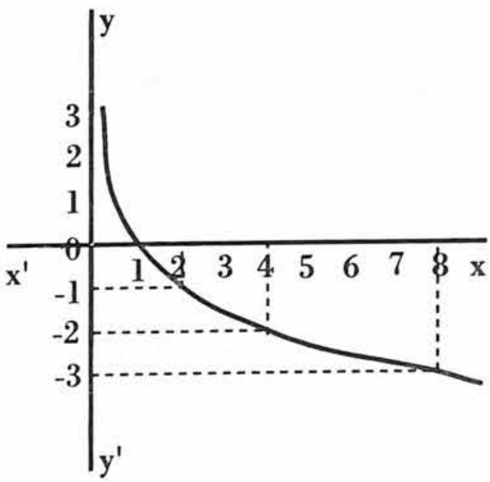
EJEMPLO



(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x\,;b < 1$

$x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^y$

x	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8
y	–3	–2	–1	0	1	2	3



7.12.6.- Ecuaciones Exponenciales

Una ecuación es exponencial cuando la incógnita se encuentra como exponente.

EJEMPLOS

1.- $3^{x+1} = 27$

2.- $e^{2x} - e^{-x} = 4$

Para resolver una ecuación exponencial se debe despejar la expresión exponencial, luego aplicar logaritmos a ambos miembros en una base que sea apropiada.

EJEMPLOS

1.- **Resolver la siguiente ecuación**

$e^x - e^{-x} = 1$

$e^x \,.\, e^x = e^{2x}$; $e^x \,.\, e^{-x} = e^0 = 1$

$1 \text{ x } e^x = 1$

$e^{2x} - 1 = e^x$

$e^{2x} - e^x - 1 = 0$

Hago $e^x = y$; $e^{2x} = y^2$

EJEMPLOS

$y^2 - y = 1 = 0$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2(1)}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $e^x = y$

$$e^x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como la función exponencial siempre es positiva

$$e^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Aplico lg en base e

$$\text{In } e^x = \text{In}\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} \qquad x = \text{In}\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$$

EJEMPLOS

2.- Resolver la ecuación $e^{3x} - 3e^{2x} + 4e^{x} - 4 = 0$

Hago
$$e^{x} = y$$
$$e^{2x} = y^2$$
$$e^{3x} = y^3$$

Sustituyo

$$y^3 - 3y^2 + 4y - 4 = 0$$

Resuelvo en y:

a.- Raíces nulas no tiene

b.- Naturaleza de las raíces

$f(y) = y^3 - 3y^2 + 4y - 4$: 3 variaciones
$f(-y) = -y^3 - 3y^2 - 4y - 4$: 0 variaciones

Nulas	+	–	Complejas
0	3	0	0
0	1	0	2

EJEMPLOS

c.- Posibles raíces racionales:

$p = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$

$p/q = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & -3 & +4 & -4 & 2 \\
 & -2 & -2 & +4 & \\
\hline
1 & -1 & +2 & 0 &
\end{array}
$$

$R = 0$, 2 es raíz

$Q\ (x) = y^2 - y + 2 = 0$

$$y = \frac{1 \pm 1 - 4(1)(2)}{2}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$y_2 = \frac{1 + \sqrt{7}\ i}{2} \quad ; \quad y_3 = \frac{1 - \sqrt{7}\ i}{2}$$

EJEMPLOS

Sustituyo:

$e^x = 2$

Aplico In

$\ln e^x = \ln 2$

$x = \ln 2$

Ejercicios

EJEMPLOS

I.- Resolver

1.- $2^{x+3} = 16$

$2^{x+3} = 2^4$

$x + 3 = 4$

$x = 4 - 3$

$x = 1$

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- $4^{x^2+x} = 16$

$$4^{x^2+x} = 4^2$$

$$x^2 + x = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 1$$

3.- $5^{x+1} = 3^{2x}$

Aplico logaritmo

$$\log 5^{(x+1)} = \log 3^{2x}$$

$$(x + 1) \log 5 = 2x \log 3$$

$$(x + 5) \log 5 = 2x \log 3$$

$$x \log 5 + 5 \log 5 = 2x \log 3$$

$$x \log 5 - 2x \log 3 = -5 \log 5$$

$$x (\log 5 - 2 \log 3) = -5 \log 5$$

$$x = \frac{-5 \log 5}{\log 5 - 2 \log 3}$$

7.12.7.- Ecuación Logarítmica

Una ecuación logarítmica es aquella que contiene una o más funciones logarítmicas de una o más incógnitas.

EJEMPLOS

Resolver

1.- $\log x - \log (x - 2) = \log 2$

$$\cancel{\log}\frac{x}{x-2} = \cancel{\log}\frac{2}{1}$$

$$\frac{x}{x-2} = 2$$

$$\begin{aligned} x &= 2(x-2) \\ x &= 2x - 4 \\ x - 2x &= -4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Compruebo en la ecuación original

$$\begin{aligned} \log 4 - \log (4 - 2) &= \log 2 \\ \log 4 - \log 2 &= \log 2 \end{aligned}$$

Resp. $x = 4$

EJEMPLOS

NOTA:

Se deben comprobar las soluciones que se obtengan ya que no se consideran los valores de las variables que corresponden al logaritmo de un número negativo.

2.- $\log(x-2) + \log(x+1) + 1 = \log 40$

$$\log(x-2) + \log(x+1) + \log 10 = \log 40$$

$$\log(x-2)\ (x+1)\ 10 = \log 40$$

$$(x-2)\ (x+1)\ \cancel{10} = \cancel{40}^4$$

$$x^2 - x - 2 = 4$$

$$x^2 - x - 2 - 4 = 0$$

$$(x-3)\ (x+2) = 0$$

$$x = 3$$

$$x = -2$$

Comprobación

Para $x = 3$

$$\log(3-2) + \log(3+1) + 1 = \log 40$$

$$\log 1 + \log 4 + 1 = \log 40$$

EJEMPLOS

Para $x = -2$

$$\log(-2-2) + \log(-2+1) + 1 = \log 40$$
$$\log -4 + \log -1 + 1 = \log 40$$

Resp. $x = 3$

Ejercicio # 7. Unidad No. 7

I.- Expresar en forma logarítmica.

a.- $2^3 = 8$

b.- $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}$

c.- $x^4 = 16$

d.- $5^{-3} = \dfrac{1}{125}$

e.- $4^{-3} = \dfrac{1}{64}$

f.- $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

g.- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

h.- $a^b = c$

i.- $x^{-y} = \frac{1}{x^y}$

j.- $p^m = n$

II.- Expresar en forma exponencial.

a.- $\lg_6 216 = 3$

b.- $\lg_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$

c.- $\lg_a b = c$

d.- $\lg_5 x = m$

e.- $\lg_5 125 = 3$

f.- $\lg_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$

g.- $\lg_m n = P$

h.- $\lg_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} = 2$

i.- $\lg_2 64 = 6$

j.- $\lg_c b = d$

III.- **Hallar el valor de la letra especificada.**

a.- $\lg_2 32 = x$

b.- $\lg_x 64 = 6$

c.- $\lg_5 x = -2$

d.- $\log_3 x = 3$

e.- $\lg_x \frac{1}{16} = -2$

IV.- Aplica log:

a.- $\lg = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

b.- $\lg \dfrac{(x+5)^3(x-5)^2}{(x+1)^4(x-5)^5}$

c.- $\lg \sqrt[8]{\dfrac{3(a+b)^4(c+d)^5}{5(a-b)^7(c-d)^6}}$

d.- $\lg \sqrt[10]{\dfrac{c(c+d)^4(c-d)^5}{2(x+y)^9(x-y)^8}}$

V.- Expresar las siguientes expresiones como un solo logaritmo.

a.- $3 \lg x - \dfrac{5 \lg y}{4}$

b.- $2 \log (x+y) - 4 \lg (x-y)$

c.- $\dfrac{3 \lg c + 2 \lg b - 4 \lg a - 3 \lg d}{6}$

d.- $\dfrac{4\ \lg\ 2}{5} - \dfrac{3\ \lg\ 4}{2}$

VI.- Resuelve las siguientes ecuaciones para x.

a.- $5^{x^2+2x} = 125$

b.- $7^{x+3} = 2401$

c.- $8^{3x-2} = 256$

d.- $\log_2 (x+1) = 3 - \lg_2 (x-1)$

e.- $\log_3 (x+4) + \log_3 (x-2) = 3$

f.- $\log (x^2-1) - \log (x-1) = 2$

g.- $2 \log_3 (x+5) = 2$

h.- $2 \log_3 (x-1) = 2$

VII.- Resolver:

a.- $e^{3x} - 7e^{x} + 6 = 0$

b.- $e^{2x} - 2e^{-2x} - 1 = 0$

c.- $e^{4x} - 3e^{2x} + 4 = 0$

d.- $e^{4x} - 13e^{e^{x}} - 7e^{x} + 36 = 0$

e.- $e^{4x} + 9e^{3x} + 27e^{2x} + 31^{ex} + 12 = 0$

VIII.- Hacer la gráfica de:

a.- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

b.- $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

c.- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d.- $y = 3^x$

e.- $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

IX.- Hacer la gráfica

a.- $y = \lg_3 x$

b.- $y = \lg_{\frac{1}{3}} x$

c.- $y = \log_{\frac{2}{3}} x$

d.- $y = \lg_{\frac{3}{2}} x$

e.- $y = \lg_{\frac{1}{4}} x$

Ejercicios de Repaso
UNIDAD No. 7

I.- Hallar el residuo utilizando el teorema del residuo. al dividir el polinomio entre el binomio.

1.- $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x - 1$ entre $x - 2$

2.- $f(x) = 4x^4 - 3x^2 - 6$ entre $2x + 1$

II.- Determine si el binomio de la izquierda es factor del polinomio de la derecha.

1.- $2x - 1$; $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 17x^2 + 58x - 24$

2.- $3x + 1$; $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 3$

III.- Determina si -4 y 2 son raíces de la ecuación $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0$ y si son raíces hallar las restantes.

IV.- Determine si $x + 2$ y $2x - 3$ son factores del polinomio $12x^4 + 4x^3 - 16x^2 - 26x + 24 = 0$ y si lo son, hallar las restantes.

V.- Hallar los valores de a y b que hagan que $2x + 1$ y $3x - 1$ sean factores del polinomio $12x^4 + ax^3 + bx^2 + x + 2 = 0$.

VI.- Dada la ecuación, hallar raíces nulas, naturaleza de las raíces, posibles raíces racionales. Resolver la ecuación.

1.- $8x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 4x + 1 = 0$

2.- $x^6 - 10x^5 + 40x^4 - 80x^3 + 80x^2 + 32x + 1 = 0$

VII.- Hacer la gráfica de:

1.- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

2.- $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

3.- $y = \lg_{\frac{2}{3}} x$

4.- $y = 2^{-x}$

VIII.- Usando las relaciones entre los coeficientes y las raíces. Formar la ecuación.

1.- $1 - i \quad ; \quad 3 - \sqrt{2}$

2.- $0, -2$ **y la raíz doble** -1

IX.- Resolver:

$$e^{3x} + 2e^{2x} - 5e^{x} - 6 = 0$$

X.- Resolver:

$$\lg (x + 1) - \lg (x - 1) = \lg (x + 1) - \lg 2$$

UNIDAD No. 8

Fracciones Parciales

UNIDAD No. 8

Fracciones Parciales

8.1.- Fracción Racional Algebráica

Si se divide un polinomio entre otro se obtiene una fracción racional algebráica.

Estos polinomios deben ser con coeficientes reales.

Una fracción es propia si el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

EJEMPLO

$$\frac{4x}{2x^2+6x-3}$$

Una fracción es impropia si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

EJEMPLO

$$\frac{x^3+4x+2}{x+4}$$

Toda fracción impropia se puede convertir en la suma de un polinomio más una fracción propia, dividiendo el numerador entre el denominador.

EJEMPLO

$$\frac{x^3+4x^2+6x+5}{x^2+x-3} \quad : \quad \begin{array}{rrrr|l} x^3 & +4x^2 & +6x & +5 & x^2+x-3 \\ \cline{5-5} -x^3 & -x^2 & +3x & & x+3 \\ \cline{1-3} & 3x^2 & +9x & +5 & \\ & -3x^2 & -3x & +9 & \\ \cline{1-4} & & 6x & +14 & \end{array}$$

$$\frac{x^3+4x^2+6x+5}{x^2+x-3} = x+3+\frac{6x+14}{x^2+x-3}$$

En cursos anteriores habíamos estudiado cómo obtener la suma de dos o más fracciones algebráicas, por ejemplo:

EJEMPLO

$$\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x-2}=\frac{x-2+3(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\frac{x-2+3x+9}{(x+3)(x-2)}$$

$$=\frac{4x+7}{(x+3)(x-2)}$$

En esta unidad se va a estudiar el problema inverso, es decir, descomponer una fracción racional dada en la suma de fracciones propias, llamadas fracciones parciales.

Por ejemplo en la igualdad anterior.

EJEMPLO

$$\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x-2}=\frac{4x+7}{(x+3)(x-2)}$$

Las dos fracciones del primer miembro son las fracciones parciales correspondientes a la fracción del segundo miembro.

Las fracciones parciales son de gran utilidad en el cálculo integral y en matemática superior.

8.2.- Teorema Fundamental en la Descomposición de una Fracción Propia en Suma de Fracciones Parciales

Cualquier fracción propia reducida a su mínima expresión puede expresarse como una suma de fracciones parciales de los siguientes tipos:

1° A cada factor lineal $ax + b$, que aparezca una sola vez como factor del denominador, corresponde una fracción parcial de la forma $\dfrac{A}{ax+b}$ en donde A es una constante distinta de cero.

EJEMPLO

$$\frac{3x+3}{(x+2)(2x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-1}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

I.- Descomponer en sus fracciones parciales simples. (Factores lineales no repetidos en el denominador).

1.- $$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{3x-2}$$

$$\text{MCM} = (x+2)(3x-2)$$

$$5x+2 = A(3x-2) + B(x+2)$$

$$5x+2 = 3Ax - 2A + Bx + 2$$

Agrupo

$$5x+2 = (3Ax + Bx) + (-2A + 2B)$$

$$5x+2 = (3A + B)x + (-2A + 2B)$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$
\begin{array}{rrcrl}
1 & 3A + B & = & 5 & (2) \\
2 & -2A + 2B & = & 2 & (3) \\
\hline
 & 6A + 2B & = & 10 & \\
 & -6A + 6B & = & 6 & \\
\hline
 & 8B & = & 16 & \\
 & B & = & 16/8 & \\
 & B & = & 2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
1 \quad 3A + 2 &= 5 \\
3A &= 5 - 2 \\
3A &= 3 \\
A &= 3/3 \\
A &= 1
\end{aligned}
$$

Resp. $\dfrac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{3x-2}$

2.- $\dfrac{7x}{2x^2-5x-3}$ **Factorizo el denominador**

$$\frac{7x}{(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-3}$$

$$
\begin{aligned}
MCM &= (2x+1)(x-3) \\
7x &= A(x-3) + B(2x+1) \\
7x &= Ax - 3A + 2Bx + B \\
7x &= (Ax + 2Bx) + (-3A + B) \\
7x &= (A + 2B)x + (-3A + B)
\end{aligned}
$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$
\begin{array}{lrl}
1 & A + 2B = 7 & (3) \\
2 & -3A + B = 0 & (1) \\
\hline
 & 3A + 6B = 21 & \\
 & -3A + B = 0 & \\
\hline
 & 7B = 21 & \\
 & B = 21/7 & \\
 & B = 3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
1 & A + 2B = 7 \\
 & A + 2(3) = 7 \\
 & A + 6 = 7 \\
 & A = 7 - 6 \\
 & A = 1
\end{array}
$$

Resp. $\dfrac{7x}{2x^2-5x-3} = \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{3}{x-3}$

Ejercicio #1. Unidad No. 8

Descomponer en sus fracciones parciales simples.

1.- $\dfrac{5x-9}{(x-3)(x-1)}$

2.- $\dfrac{16x^2-15x-33}{(x+1)(x+2)(x-5)}$

3.- $\dfrac{10x-1}{4x^2-1}$

4.- $\dfrac{7x^2-15x+2}{6x^3-5x^2-2x+1}$

5.- $\dfrac{-3x^2-x+6}{x^3+4x^2+3x}$

6.- $\dfrac{7x^2+3x-10}{x^3-x^2-2x}$

7.- $\dfrac{2x^2+6x-17}{12x^3-16x^2-5x+3}$

8.- $\dfrac{6x^3-11x^2+2x+12}{x^3-x^2-4x+4}$

9.- $\dfrac{9x^2-5x-10}{(x-1)(x^2-4)}$

10.- $\dfrac{x^3-x^2+x-4}{x^2-3x+2}$

2° A cada factor lineal ax + b que aparezca k veces como factor del denominador, corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\ldots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ son constantes y $A_k \neq 0$

EJEMPLO

$$\frac{2x+3}{(x-4)^3}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{(x-4)^2}+\frac{C}{(x-4)^3}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

1.- $$\frac{2x^2+6x-4}{x(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

$\text{MCM} = x\,(x+2)^2$

$2x^2+6x-4 = A\,(x+2)^2 + Bx\,(x+2) + Cx$

$2x^2+6x-4 = A\,(x^2+4x+4) + Bx^2 + 2Bx + Cx$

$2x^2+6x-4 = Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx$

$2x^2+6x-4 = (Ax^2 + Bx^2) + (4Ax + 2Bx + Cx) + 4A$

$2x^2+6x-4 = (A + B)\,x^2 + (4A + 2B + C)\,x + (4A)$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$\begin{aligned} (1)\quad & A + B &&= 2 \\ (2)\quad & 4A + 2B + C &&= 6 \\ (3)\quad & 4A &&= -4 \end{aligned}$$

(3) $4A = -4$

$A = -4/4$

$A = -1$

(1) $A + B = 2$

$-1 + B = 2$

$B = 2 + 1$

$B = 3$

(2) $4A + 2B + C = 6$

$4(-1) + 2(3) + C = 6$

$-4 + 6 + C = 6$

$2 + C = 6$

$C = 6 - 2$

$C = 4$

Resp. $\dfrac{2x+6x-4}{x(x+2)^2} = \dfrac{4}{(x+2)^2} + \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{x}$

Ejercicios

EJEMPLOS

2.- $$\frac{5x^2+4x+2}{(x-4)(x+3)^2}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}$$

$MCM = (x-4)(x+3)^2$

$5x^2 + 4x + 2 = A(x+3)^2 + B(x-4)(x+3) + C(x-4)$

$5x^2 + 4x + 2 = A(x^2+6x+9) + B(x^2-x-12) + Cx - 4C$

$5x^2 + 4x + 2 = Ax^2 + 6Ax + 9A + Bx^2 - Bx - 12B + Cx - 4C$

$5x^2 + 4x \quad 2 = (Ax^2 + Bx^2) + (6Ax - Bx + Cx) + (9A - 12B - 4C)$

$5x^2 + 4x + 2 = (A+B)x^2 + (6A - B + C)x + (9A - 12B - 4C)$

1 $\quad A + B + \quad = 5$

2 $\quad 6A - B + C = 4$

3 $\quad 9A - 12B - 4C = 2$

---

2 $\quad 6A - B + C = 4 \quad (4)$ $\qquad$ 1 $\quad A + B = 5$

3 $\quad 9A - 12B - 4C = 2 \quad (1)$ $\qquad 2 + B = 5$

$24A - 4B + 4C = 16$ $\qquad B = 5 - 2$

$9A - 12B - 4C = 2$ $\qquad B = 3$

$33A - 16B \quad = 18 \quad (1)$

Ejercicios

EJEMPLOS

$33A - 16B \quad = 18 \quad (1)$

1 $\quad A + \quad B \quad = 5 \quad (16)$ 2 $\quad 6A - B + C = 4$

$33A - 16B \quad = 18 \qquad 6(2) - 3 + C = 4$

$16A + 16B \quad = 80 \qquad 12 - 3 + C = 4$

$49A \quad = 98 \qquad 9 + C = 4$

$A = 98/49 \qquad C = 4 - 9$

$A = 2 \qquad C = -5$

Resp. $\dfrac{5x^2+4x+2}{(x-4)(x+3)^2} = \dfrac{2}{x-4} + \dfrac{3}{x+3} - \dfrac{5}{(x+3)^2}$

Ejercicio # 2. Unidad No. 8

Descomponer en sus fracciones parciales simples.

1.- $\dfrac{3x^2+2x-3}{x^3}$

2.- $\dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$

3.- $\dfrac{4x^2-6x+5}{(x-1)^3}$

4.- $\dfrac{x^2-1}{x^3-6x^2+12x-8}$

5.- $\dfrac{x^3+14x^2+36x+57}{x^2(x+3)^2}$

6.- $\dfrac{2x^3+2x^2+5x}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}$

7.- $\dfrac{x^5+x^4-x^3+6x+3}{x^4+2x^3+x^2}$

8.- $\dfrac{3x^3+10x^2-5x}{(x-1)^2(x+1)^2}$

9.- $\dfrac{x^2+5x+3}{x^3+2x^2+x}$

10.- $\dfrac{x^2-3x}{x^3-8x^2+20x-16}$

3° A cada factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ (no factorizable en el conjunto de los reales) que aparezca una sola vez como factor del denominador (no repetido), corresponde una fracción parcial de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

En donde A y B son constantes no simultáneamente nulas.

EJEMPLO

$$\frac{3x+4}{x^2-x-1}=\frac{Ax+B}{x^2-x-1}$$

Ejercicio

EJEMPLO

1.- $$\frac{x^2+2x+3}{x^4+x^3+2x^2}=\frac{x^2+2x+3}{x^2\left(x^2+x+2\right)}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+2}$$

$$MCM = x^2\,(x^2+x+2)^2$$

$$x^2 + 2x + 3 = Ax\,(x^2+x+2) + B\,(x^2+x+2) + (Cx+D)\,(x^2)$$

$$x^2 + 2x + 3 = Ax^3 + Ax^2 + 2Ax + Bx^2 + Bx + 2B + Cx^3 + Dx^2$$

Ejercicio

EJEMPLO

$$x^2 + 2x + 3 = (Ax^3 + Cx^3) + (Ax^2 + Bx^2 + Dx^2) + (2Ax + Bx) + 2B$$

$$x^2 + 2x + 3 = (A + C)\,x^3 + (A + B + D)\,x^2 + (2A + B)\,x + 2B$$

1 $\quad A + C = 0$

2 $\quad A + B + D = 1$

3 $\quad 2A + B = 2$

4 $\quad 2B = 3$

4 $\quad 2B = 3$

$B = 3/2$

1 $\quad A + C = 0$

$1/4 + C = 0$

$C = -1/4$

3 $\quad 2A + B = 2$

$$2A + \frac{3}{2} = 2$$

$$2A = 2 - \frac{3}{2}$$

$$2A = \frac{4-3}{2}$$

$$2A = \frac{1}{2}$$

2 $\quad A + B + D = 1$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + D = 1$$

$$\frac{1+6}{4} + D = 1$$

$$\frac{7}{4} + D = 1$$

$$D = 1 - \frac{7}{4}$$

Ejercicio

EJEMPLO

$$A = \frac{1}{2} \div 2 \qquad D = \frac{4-7}{4}$$

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \qquad D = -\frac{3}{4}$$

$$A = \frac{1}{4}$$

Resp. $$\frac{x^2+2x+3}{x^2\left(x^2+x+2\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}}{\left(x^2+x+2\right)}$$

$$= \frac{1}{4x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{x+3}{4\left(x^2+x+2\right)}$$

Ejercicio # 3. Unidad No. 8

Descomponer en sus fracciones parciales:

1.- $\dfrac{3x^2+2x+3}{x\left(x^2+1\right)}$

2.- $\dfrac{5x^3-8x+11}{x^4-x^2-30}$

3.- $\dfrac{-3x^3+x^2+18}{x^4+9x^2}$

4.- $\dfrac{2x^3+5x}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)}$

5.- $\dfrac{2x^3-5x^2+8x+7}{\left(x-1\right)^2\left(x^2+5\right)}$

6.- $\dfrac{12x^3+4x^2+11x-1}{6x^4+11x^2+3}$

7.- $\dfrac{2x^5-3x^4-x^3-x^2-4x+4}{x^4-x^2+2x-1}$

8.- $\dfrac{3x^4+x^3-x^2-6x}{x^5-x^4-x^3-x^2+x+1}$

9.- $\dfrac{5x^2-8}{x\left(x^2+2x-4\right)}$

10.- $\dfrac{2x^2+x+3}{x^4+5x^2+6}$

4° A cada factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ (no factorizable en el conjunto de los números reales) que aparezca k veces como factor del denominador, corresponde la suma de k fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1 + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{\left(ax^2 + bx + c\right)^2}$$

$$+ \frac{A_3x + B_3}{\left(ax^2 + bx + c\right)^3} + \ldots + \frac{A_kx + B_k}{\left(ax^2 + bx + c\right)^k}$$

A_1B_1 . A_2, B_2 . A_3, B_3, ... , A_k, B_k son constantes;y A_k y B_k no simultáneamente nulas.

EJEMPLO

$$\frac{x+3}{x^2\left(x^2+3x+5\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$

$$+ \frac{Cx+D}{\left(x^2+3x+5\right)} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+3x+5\right)^2}$$

Ejercicios

EJEMPLOS

Descomponer en sus gracciones parciales simples.

1.- $$\frac{x^4 - x^3 + 8x^2 - 6x + 7}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

$$MCM = (x - 1)\ (x^2 + 2)^2$$

$$x^4 - x^3 + 8x^2 - 6x + 7 = A\ (x^2 + 2)^2 + (Bx + C)\ (x - 1)\ (x^2 + 2) + (Dx + E)\ (x - 1)$$

$$x^4 - x^3 + 8x^2 - 6x + 7 = A\ (x^4 + 4x^2 + 4) + (Bx + C)\ (x^3 - x^2 + 2x - 2) + Dx^2 - Dx + Ex - 3$$

$$x^4 - x^3 + 8x^2 - 6x + 7 = Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^4 - Bx^3 + 2Bx^2 - 2Bx + Cx^3 - Cx^2 + 2Cx - 2C + Dx^2 - Dx + Ex - E$$

Ejercicios

EJEMPLOS

$$x^4 - x^3 + 8x^2 - 6x + 7 = (Ax^4 + Bx^4) + (-Bx^3 + Cx^3) + (4Ax^2 + 2Bx^2 - Cx^2 + Dx^2) + (-2Bx + 2Cx - Dx + Ex) + (4A - 2C - E)$$

$$x^4 - x^3 + 8x^2 - 6x + 7 = (A + B)\,x^4 + (-B + C)\,x^3 + (4A + 2B - C + D)\,x^2 + (-2Bx + 2C - D + E)\,x + (4A - 2C - E)$$

$$\begin{array}{lrcl}
1 & A + \cancel{B} & = & 1 \\
2 & -\cancel{B} + \cancel{C} & = & -1 \\
3 & 4A + \cancel{2B} - \cancel{C} + \cancel{D} & = & 8 \\
4 & -\cancel{2B} + \cancel{2C} - \cancel{D} + \cancel{E} & = & -6 \\
5 & 4A - \cancel{2C} - \cancel{E} & = & 7 \\
\hline
 & 9A & = & 9
\end{array}$$

$$A = 9/9$$

$$A = 1$$

Ejercicio

EJEMPLO

(1) $A + B = 1$

$1 + B = 1$

$B = 1 - 1$

$B = 0$

(3) $4A + 2B - C + D = 8$

$4(1) + 2(0) - (-1) + D = -1$

$4 + 1 + D = 8$

$D = 8 - 5$

$D = 3$

(2) $-B + C = -1$

$C = -1$

(5) $4A - 2C - E = 7$

$4(1) - 2(-1) - E = 7$

$4 + 2 - E = 7$

$-E = 7 - 6$

$-E = 1$

$E = -1$

Resp. $$\frac{x^4 - x^3 + 8x^2 - 6x + 7}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+2} + \frac{3x-1}{(x^2+2)^2}$$

Ejercicio #4. Unidad No. 8

Descomponer en sus fracciones parciales.

1.- $\dfrac{2x^4+6x^2+x-1}{(x-1)(x^2+1)^2}$

2.- $\dfrac{3x^4+12x^2-4x+4}{(x+2)(x^2+2)^2}$

3.- $\dfrac{x^4-2x^3+11x^2+25}{x^2(x^2+5)^2}$

4.- $\dfrac{x^3+4x^2+4}{x^3(x^2+2)^2}$

5.- $\dfrac{x^3+2x^2+3x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$

6.- $\dfrac{x^6+x^3-3x^2-3x-2}{(x^2+1)^2}$

7.- $\dfrac{x^3-2x^2+4x-9}{x^4+6x^2+9}$

8.- $\dfrac{2x+7}{(x^3-1)(x^2+x+1)}$

9.- $$\frac{3x^5 - 3x^4 - 22x^3 - 23x^2 - 16x + 25}{(x-3)^2(x^2+x+1)^2}$$

10.- $$\frac{2x^5 + 9x^3 + 3x^2 + 5x + 4}{x^6 + 2x^3 + 1}$$

Ejercicios de Repaso UNIDAD No. 8

Descomponer en sus fracciones parciales.

1.- $\dfrac{x^3+5x^2+x}{x^4+x^2+1}$

2.- $\dfrac{x^3+4x^2+2x-3}{x^2+x-2}$

3.- $\dfrac{5x^2+x-1}{x^4-x^2+2x-1}$

4.- $\dfrac{x^5+2x^4+2x^3+10x^2-6x-3}{x^6-2x^3+1}$

5.- $\dfrac{2x^3-3x^2-8x-1}{x^2-1}$

6.- $\dfrac{x^5-5x^4+7x^3-3x^2}{x^4-2x^3+x^2}$

7.- $\dfrac{-x^4-28x^2-4}{x^8+16}$

8.- $\dfrac{2x^3+3x^2-8x-7}{x^4-5x^2+4}$

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 1

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 1

Ejercicio # 1

I.-

1.- Comprensión

2.- Comprensión

3.- Extensión

4.- Comprensión

5.- Comprensión

II.-

1.- $\{1, 4, 8\}$

2.- $\{2, 3, 5, 6\}$

3.- $\{7\}$

4.- $\{7\}$

5.- $\{1, 2, 4, 5, 8\} = A$

6.- $\{1, 2, 3, 4, 5,. 6, 7, 8\}$

7.- $\{1, 2, 4, 5, 8, 9\}$

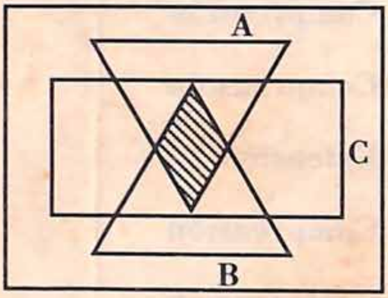
8.- $\{1, 2, 4, 5\}$

9.- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

10.- $\{1, 4, 7, 8, 9\}$

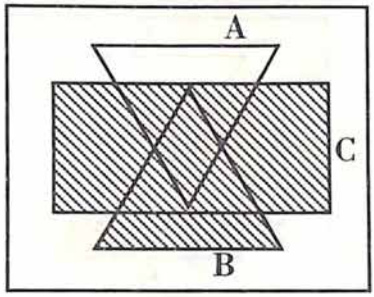
III.-

1.-



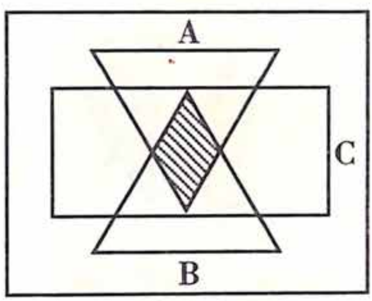
$A \cap B$

2.-



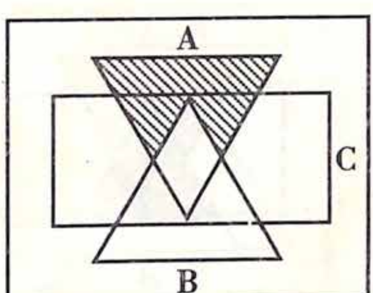
B ∪ C

3.-



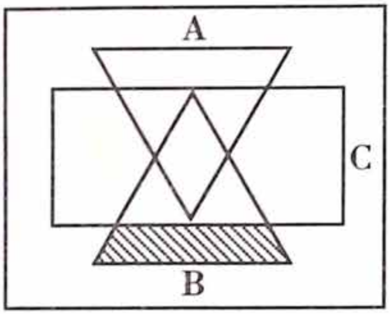
A ∩ B ∩ C

4.-



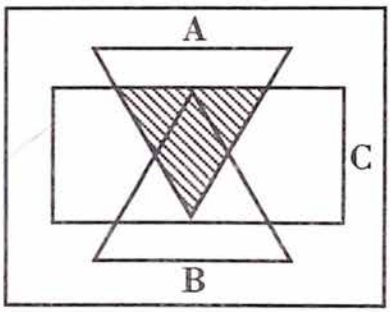
A – B

5.-



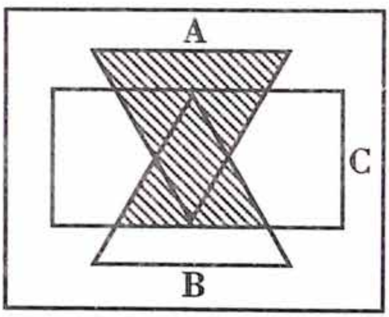
B – C

6.-



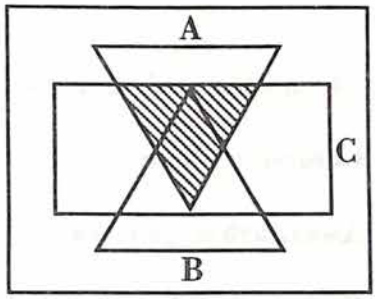
$A \cap (B \cup C)$

7.-



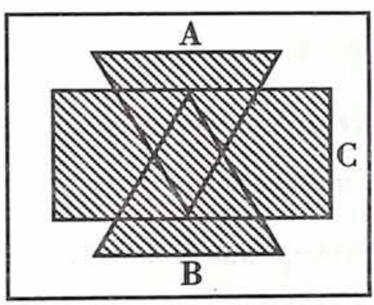
$A \cup (B \cap C)$

8.-



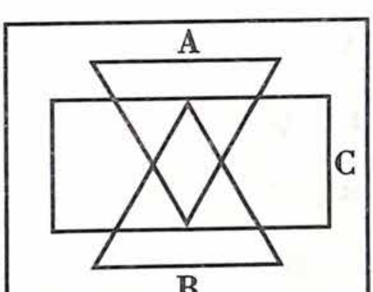
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

9.-



$A \cup B \cup C$

10.-



$(A - C) \cap B$

IV.-

1.- Idempotencia de la intersección

2.- Conmutativa de la unión

3.- Asociativa de la intersección

4.- Distributiva de la intersección con relación a la unión

5.- D' Morgan

6.- D' Morgan

7.- Distributiva de la unión con relación a la intersección

8.- Idempotencia de la unión

V.-

1.- A'

2.- $P \cap Q$

3.- $B \cup C$

4.- $C - D$

VI.-

a.- $2^A = \{ \{\ \} , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{d\} , \{a,b\} ,$
$\{a,c\} , \{a,d\} , \{b,c\} , \{b,d\} , \{c,d\}$
$\{a,b,c\} , \{a,b.d\} , \{a,c,d\} , \{b,c,d\} ,$
$\{a,b,c,d\} \}$

b.- $2^P = \{ \{\ \} , \{x\} , \{y\} , \{z\} , \{x,y\} , \{x,z\} ,$
$\{y,z\} , \{x,y,z\} \}$

VII.-

1.- $A \cup A = A$; $B \cup B = B$; $C \cup C = C$

2.- $A \cap B = B \cap A$; $A \cap C = C \cap A$;
$B \cap C = C \cap B$

3.- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4.- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

5.- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

VIII.-

1.- A

2.- A

3.- $\emptyset$

4.- P

5.- X

6.- $P' \cap Q'$

7.- $M' \cup N'$

8.- $Q \cup B$

9.- $\emptyset$

10.- U

11.- U

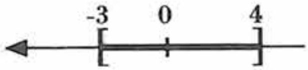
12.- U

IX.-

1.- 

; $(-\infty, -6]$

2.- $\{x/x > 3\}$; $(3, \infty)$

3.- 

; $\{x/-3 \leq x \leq 4\}$

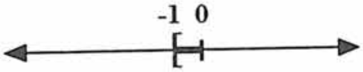
4.- $\{x/x < -2\}$; $(-\infty, -2)$

5.- 

; $[-3, 6]$

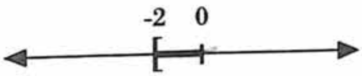
6.- 

; $\{x/x < -5\}$

7.- 

; $[-1, \infty)$

8.- $\{x/-2 < x < 4\}$; $(-2, 4)$

9.- 

; $\{x/x \geq -2\}$

10.- $\{x/x \leq 4\}$; $(-\infty, 4]$

X.-

1.- $[-3 , 4]$

2.- $(7 , 10)$

3.- $(4 , 7]$

4.- $[-3 , 10)$

XI.-

1.- $\{1 , 2\}$

2.- $\{ \}$

3.- $\{6\}$

4.- $\{-2\}$

5.- $\{-3 , 3\}$

6.- $\{0\}$

7.- $\{-2 , 0\}$

8.- $\{-9\}$

9.- $\{1 , 3 , 5 , \ldots\}$

10.- $\{-1 , 5\}$

XII.-

1.- $\{-6\}$

2.- $\{-6 , 0 , 6\}$

XIII.-

1.- $\{-2\}$

2.- $\{-2 , 1 , 3\}$

3.- $\{-2 , 1 , 3\}$

4.- $\{3\}$

5.- $\{-2\}$

6.- $\{-2 , 1 , 3\}$

7.- $\{1\}$

8.- $\{1\}$

9.- $\{-2\}$

10.- $\{1\}$

XIV.-

1.- $[-2 ; 5]$

2.- $(-\infty, \infty)$

3.- $(5, \infty)$

4.- $(-\infty, -2)$

XV.-

1.- $A = A \cap B$

2.- $A \subset (A \cup B)$

3.- A y B son disjuntos

4.- B

Ejercicio # 2

I.-

a.- $(2x + 2 = 0) \wedge (x = 1)$

b.- $\{\ \}$

II.-

a.- $(3x^2 - 27 = 0) \vee (x^2 - 9 = 0)$

b.- $\{-3 , 3\}$

III.-

a.- $\sim (x^2 - x - 6 = 0)$

b.- $\{x/x \in R , x \neq 4\}$

IV.-

a.- $(x^2 = 16) \rightarrow (x = -4)$ -4

b.- $\{x/x \in R , x \neq 4\}$

V.-

a.- $(x^2 + 4x + 3 = 0) \leftrightarrow (x^2 + 2x - 3 = 0)$

b.- $\{x/x \in R , x \neq -1 , 1\}$

VI.-

1.- $\{-1\}$

2.- $\{\ \}$

3.- $[0\ ,6]$

4.- $[0\ ,5]$

5.- $\{4\}$

VII.-

1.- $\{-3\ ,3\ ,4\}$

2.- $(-\infty\ ,\infty)$

3.- $[-3\ ,8]$

4.- $\{-2\ ,2]$

5.- $\{-2\ ,-1\ ,0\ ,2\}$

VIII.-

1.- $\{x/x \in R\ ,x \neq 0\ ,1\}$

2.- $\{x/x \in R\ ,x \neq -5\ ,2\}$

3.- $\{x/x \in R\ ,x \neq -3\ ,0\}$

4.- $\{x/x \in R\ ,x \neq -4\ ,5\}$

5.- $\{x/x \in R\ ,x \neq -1\}$

IX.-

1.- $\{x/x \in R , x \neq 2\}$

2.- $\{x/x \in R , x \neq 0 , 2\}$

3.- $\{x/x \in R , x \neq 2\}$

4.- $\{x/x \in R , x \neq -4 , 4\}$

5.- $\{x/x \in R , x \neq -3\}$

X.-

1.- $\{x/x \in R , x \neq -6 , 0\}$

2.- $\{x/x \in R , x \neq -7 , -1 , 4\}$

3.- $\{x/x \in R , x \neq 2 , 3\}$

4.- $\{x/x \in R , x \neq 4\}$

5.- $\{x/x \in R , x \neq 4 , 5\}$

XI.-

1.-

p	q	~p	~q	~p∧~q	~[~p∧~q]	[p∨~q]	~[~p∧~q]→[p∨~q]
V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	V

2.-

p	q	r	~p	~q	~r	[~p∨~q]	~[~p∨~q]	~~[~p∨~q]
V	V	V	F	F	F	F	V	F
V	V	F	F	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	F	V

~q∧~r	~~[~p∨~q]↔[~q∧~r]
F	V
F	V
F	F
V	V
F	F
F	F
F	F
V	V

3.-

p	q	r	~p	~q	~r	~p∧~q	~q∨~r	[~p∧~q]∨{~q∨~r}
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

p → [{~p∧~q} ∨ {~q∨~r}]
F
V
V
V
V
V
V
V

4.-

p	q	r	~p	~r	$p\wedge q$	$[\sim p\rightarrow(\sim r)]$	$(p\wedge q)\leftrightarrow[\sim p\rightarrow(\sim r)]$
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	F

5.-

p	q	r	~p	~q	~r	$\sim q\vee\sim r$	$\{p\wedge(\sim q\vee\sim r)\}$	$[\sim p\wedge(\sim q)]$
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	V	V	V	F
V	F	V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V	F
F	V	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	F	V

$\{p\wedge(\sim q\vee\sim r)\} \leftrightarrow [\sim p\wedge(\sim q)]$
V
F
F
F
V
V
F
F

XII.-

1.- Idempotencia

2.- Distributiva

3.- Idempotencia

4.- Ley de D'Morgan

5.- Ley de D'Morgan

XIII.-

1.- Verdadero

2.- Falso

3.- Falso

4.- Falso

5.- Verdadero

6.- Falso

7.- Verdadero

8.- Falso

XIV.-

1.-

p	q	$p\leftrightarrow q$	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow p)\wedge(q\rightarrow p)]$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

$[(p\leftrightarrow q)]\leftrightarrow[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)]$
V
V
V
V

2.-

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

$[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
V
V
V
V
V
V
V
V

3.-

p	q	r	p→q	[~(p→q)]	[p↔(~q)]
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F

[~(p→q)] ↔ [p↔(~q)]
V
V
F
F

p	q	r	~p	~q	~r	~(~p)	[~(~p)∧(~q)]	[q∨(~r)]
V	V	V	F	F	F	V	F	V
V	V	F	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V

~[~(~p)∧(~q)]	~[~(~p)∧(~q)]→[q∨(~r)]
V	F
V	F
F	V
F	V
V	F
V	F
V	F
V	F

XV.-

1.-

V	~V
V	F

2.-

p	~p	~~p
V	F	V
F	V	F

3.-

p	V	p ∧ V
V	V	V
F	V	F

4.-

p	q	p∨q	~(p∨q)	~p	~q	~p∧~q
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

5.-

V	p	$p \vee \sim p$
V	V	V
V	F	V

6.-

P	~p	$p \vee p$
V	V	V
F	F	F

7.-

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

8.-

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

9.-

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

10.-

p	F	$p \wedge F$
V	F	F
F	F	F

RESPUESTAS

Ejercicios de Repaso

UNIDAD No. 1

RESPUESTAS

Ejercicios de Repaso

UNIDAD No. 1

I.-

a.- Falso: Cuando se detallan sus elementos.

b.- Falso: $A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$

c.- Falso: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$

d.- Verdadero: $B \subset C$. Todo elemento de B es elemento de C.

e.- Falso: $\{\ \} = \emptyset$

f.- Verdadero: El complemento del complemento de un conjunto es igual al mismo conjunto.

g.- Verdadero: La intersección son los elementos de A que están en B.

h.- Falso: no necesariamente esto sucede si $A = B$.

i.- Verdadero: Los elementos del conjunto son del mismo conjunto.

j.- Falso: Significa el conjunto potencia de A.

II.-

Variado.

III.-

1.- $A = \{a , e , i , o , u\}$

2.- $B = \{\ \}$

3.- $C = \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

4.- $D = \{2 , 4 , 6 , 8 , \ldots\}$

5.- $E = \{1 , 3 , 5 , 7 , \ldots\}$

IV.-

Son verdaderas 3, 4 , 5, 8, 9.

V.-

1.- Falso

2.- Falso

3.- Verdadero

4.- Falso

5.- Falso

6.- Falso

7.- Verdadero

8.- Verdadero

9.- Verdadero

10.- Verdadero

VI.-

1.-

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2.-

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3.-

p	~p
V	F
F	V

4.-

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

5.-

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

VII.-

1.-

p	q	r	~r	$p \vee q$	$p \wedge \sim r$	$(p \vee q) \wedge (p \wedge \sim r)$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F

2.-

p	q	r	~p	~q	~r	~p∧~q	~p∨~r	(p∧~q)↔(~p∨~r)
V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	F	F	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F	V	F

3.-

p	q	r	~p	~q	~r	~p→~q	p↔~r	(~p→~q)∧(~p↔~r)
V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	F	F

4.-

p	q	r	~p	~q	~r	(~p↔~q)	~(~p↔~q)	(q∧~r)
V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	F	F

~(~p↔~q)→(q∧~r)
V
V
F
F
F
V
V
V

5.-

p	q	r	$q \to r$	$p \to q$	$(q \to r) \leftrightarrow (p \to q)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

VIII.-

1.- Ley D'Morgan: El complemento de la conjunción es igual a la disyunción de los complementos.

2.- Ley Distributiva de la Conjunción con relación a la disyunción.

3.- La disyunción de p y q es igual a la disyunción de q y p.

4.- Ley Distributiva de la Disyunción con relación a la conjunción.

5.- El complemento de la disyunción es igual a la conjunción de los complementos.

IX.-

— Escribir el conjunto de todos los subconjuntos posibles de un conjunto dado.

X.-

— Un subconjunto.

XI.-

— $A \subset B$

XII.-

— Disjuntos.

XIII.-

— El vacío.

XIV.-

— Vacío.

XV.-

— $A \subset B$ ó $B \subset A$

XVI.-

1.- V

2.- F

3.- V

4.- F

5.- F

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 2

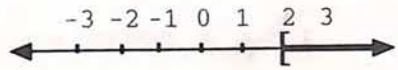
RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 2

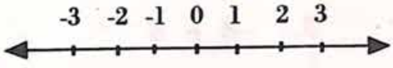
Ejercicio No. 1

I.-

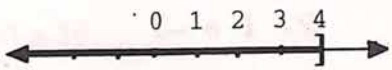
1.- $\{x/x \geq 2\}$



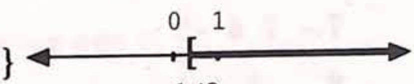
2.- Ø ó { }



3.- $\{x/x \leq 4\}$



4.- $\{x/x \geq 1/3\}$



II.-

1.- 8

2.- 10

3.- 7

4.- 11

5.- 4

6.- 4

7.- 6

8.- 2

9.- 11

10.- 13

III.-

1.- 6 ó –6

2.- –2 ó 2

3.- –8 ó 8

4.- –6 ó 4

5.- 1 ó –7

6.- 4 ó –2

7.- 7 ó –3

8.- –5 ó 1

9.- 6 ó –6

10.- 3 ó –11/3

IV.-

1.- La distancia de x al origen es menor o igual que 6. $|x| \leq 6$

2.- La distancia de x al origen es mayor que 4. $x > 4$

3.- La distancia de x al punto −3 es menor que 5. $x - 3 \leq 5$

4.- La distancia de x al punto 3 es mayor que 7.

5.- Dos veces la distancia de x al punto −1 es menor que 8.

6.- Dos veces la distancia de x al punto −1 es mayor o igual a 6.

7.- Dos veces la distancia de x al origen es igual a 5.

8.- Dos veces la distancia de x al punto −2 es igual a 10.

9.- Tres veces la distancia de x al punto −1 es menor que 6.

10.- Dos veces la distancia de x al punto −4 es mayor que 8.

V.-

1.- $/x/ > 6$

2.- $/x + 3/ < 4$

3.- $/x - 5/ > 1$

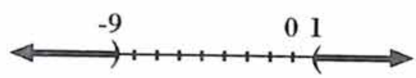
4.- $/3x + 6/ > 9$

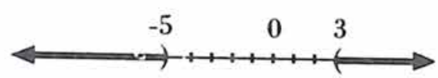
5.- $/x + 4/ = 0$

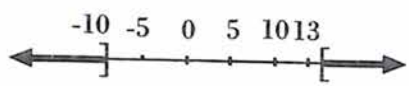
VI.-

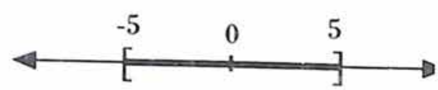
1.- $\{x/-5 < x < 1\}$ 

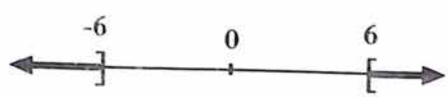
2.- $\{x/-2 < x < 4\}$ 

3.- $\{x/-9 > x > 1\}$ 

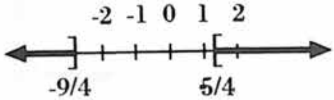
4.- $\{x/-5 > x > 3\}$ 

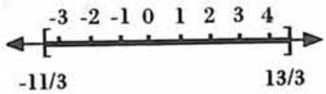
5.- $\{-5 \geq x \geq 13\}$ 

6.- $\{x/-5 \leq x \leq 5\}$ 

7.- $\{x/-6 \geq x \geq 6\}$ 

8.- $\{x/-3 \le x \le 7\}$ 

9.- $\{x/-9/4 \ge x \ge 7/4\}$ 

10.- $\{x/-11/3 \le x \le 13/3\}$ 

VII.-

1.- $\{x/\ 0 \le x \le 3\}$

2.- $\{x/\ -1 \le x \le -3\}$

3.- $\{x/\ 0 \ge x \ge 1\}$

4.- $\{x/\ -1 > x > 1\}$

5.- $\{x/\ -2 \ge x \ge 3\}$

6.- $\{x/\ 0 \le x \le 3/2\}$

7.- $\{x/\ -2 \le x \le 2\}$

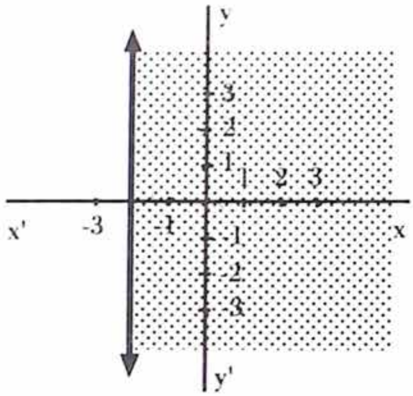
8.- $\{x/\ -1 \le x \le 1\}$

9.- $\{x/\ -6 \le x \le -1\}$

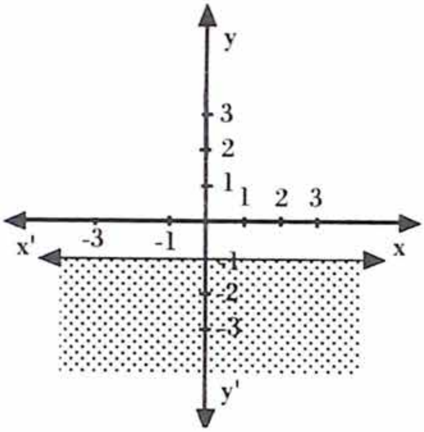
10.- $\{x/\ 0 < x < 4\}$

VIII.-

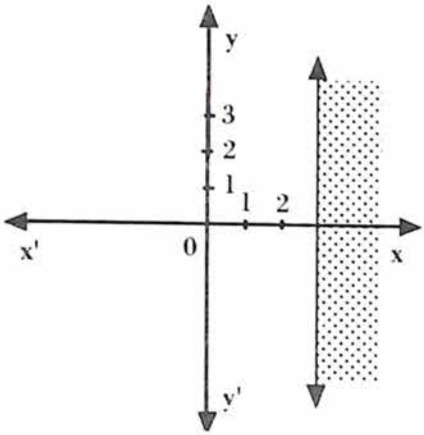
1.-



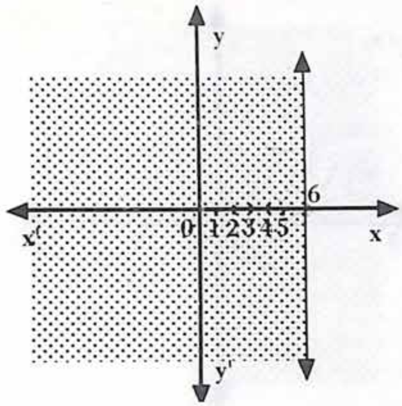
2.-



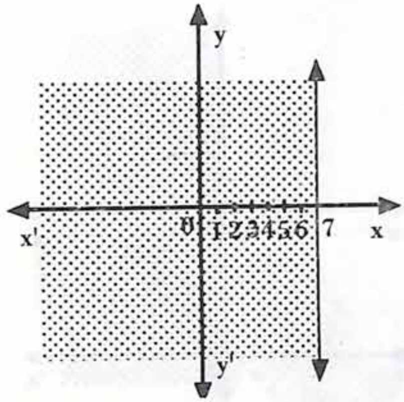
3.-



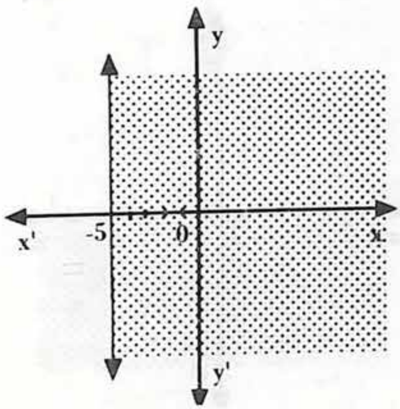
4.-



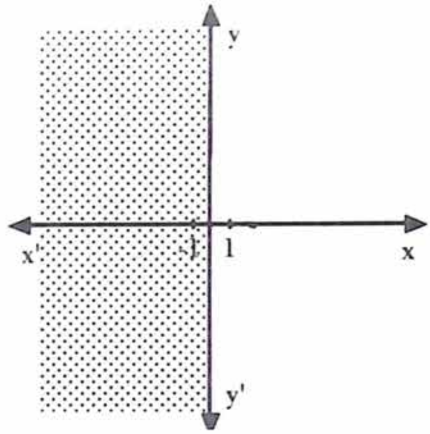
5.-



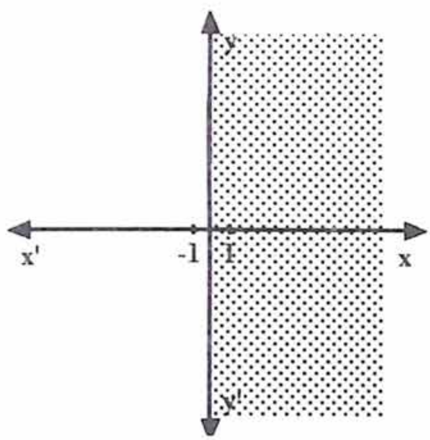
6.-



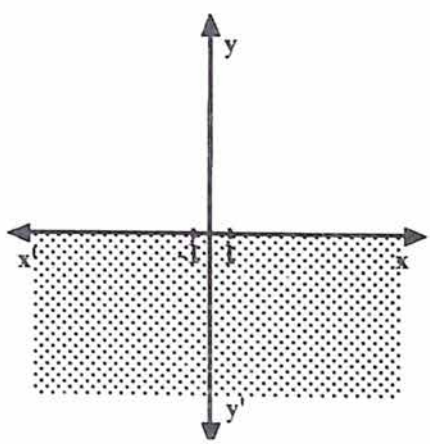
7.-



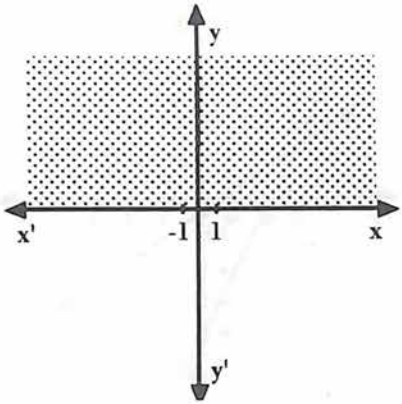
8.-



9.-

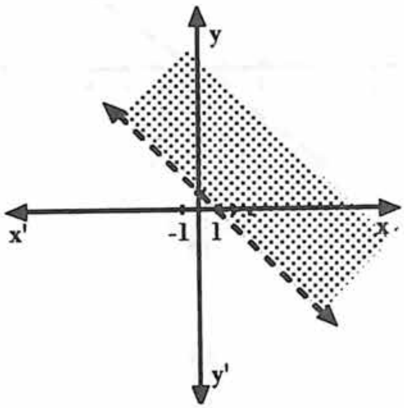


10.-

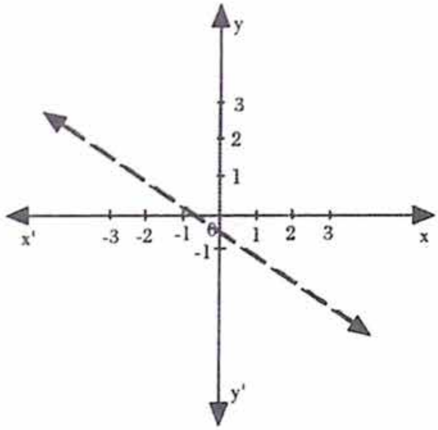


IX.-

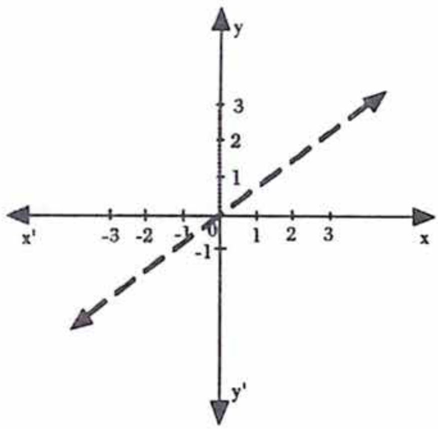
1.-



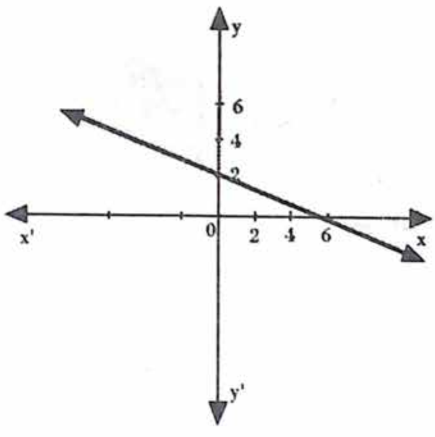
2.-



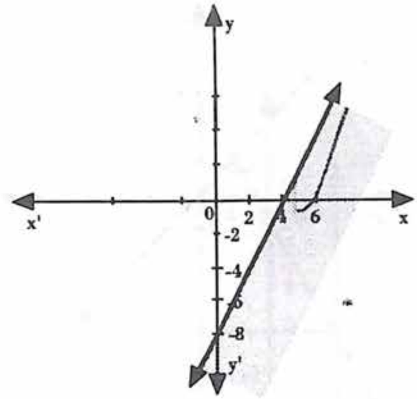
3.-



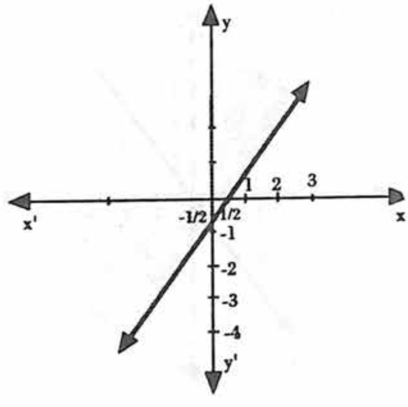
4.-



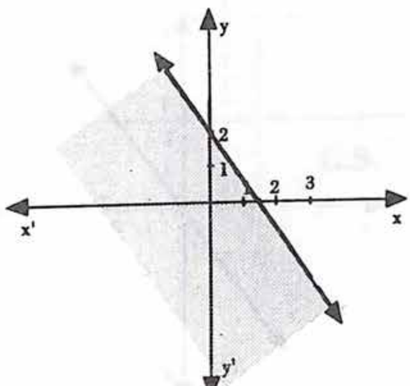
5.-



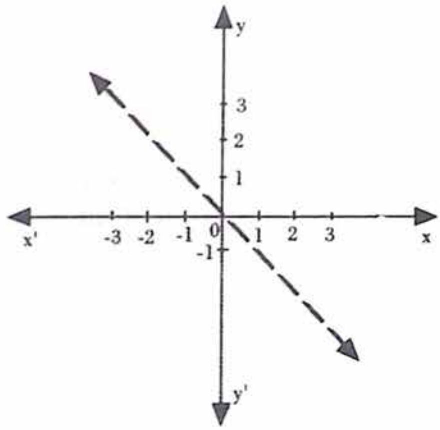
6.-



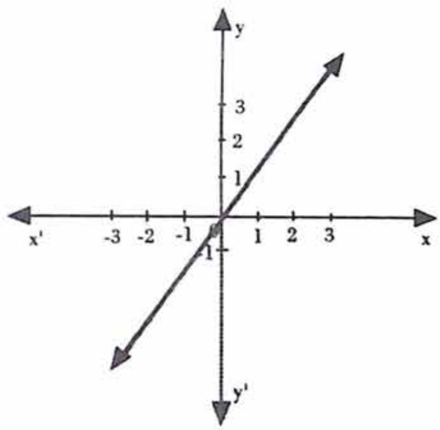
7.-



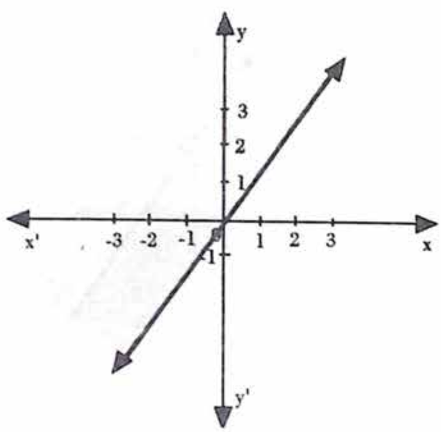
8.-



9.-

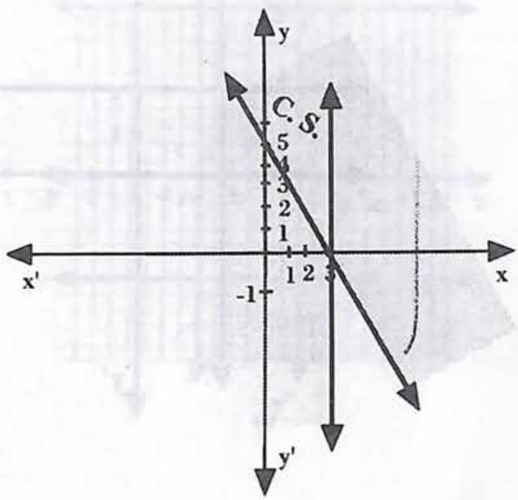


10.-

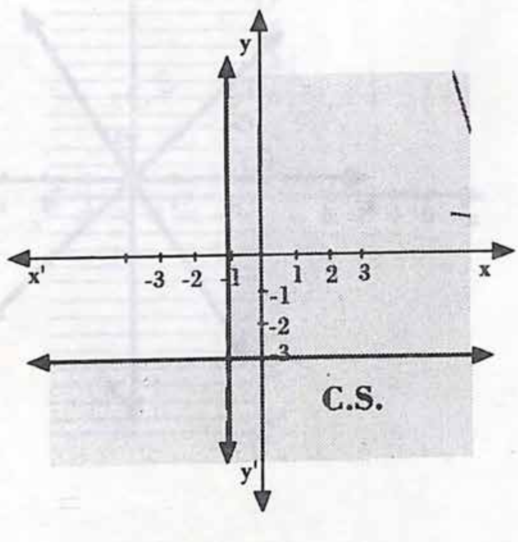


X.-

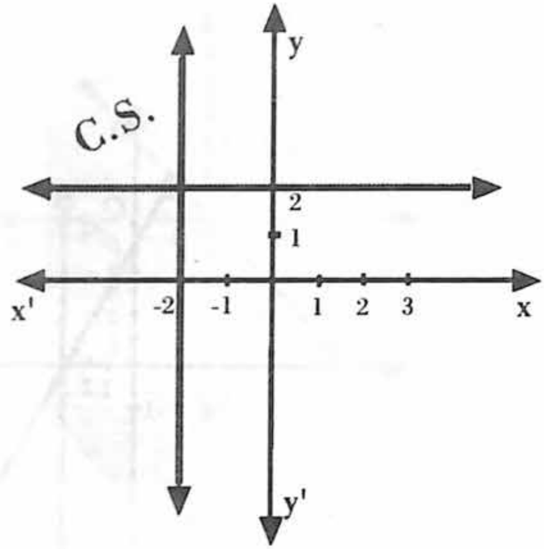
1.-



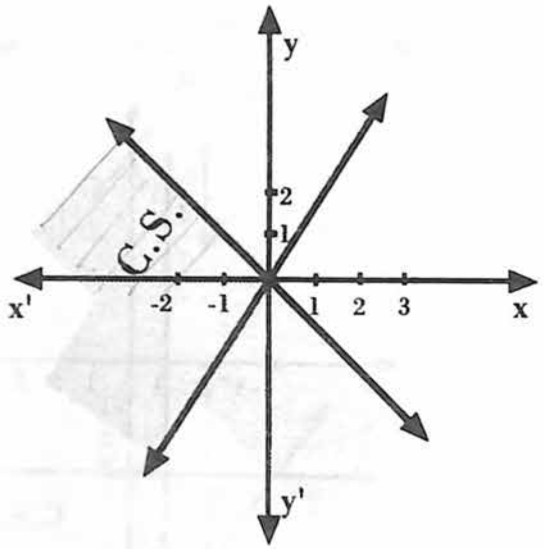
2.-



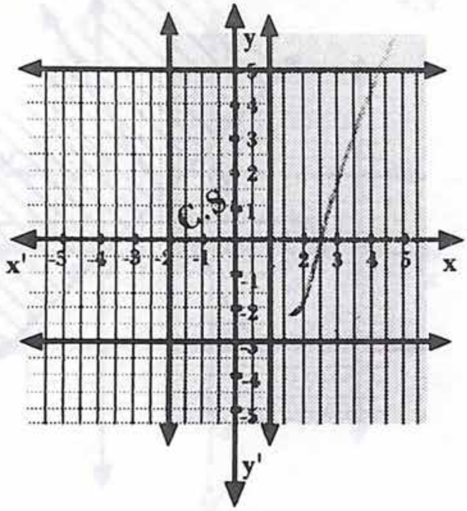
3.-



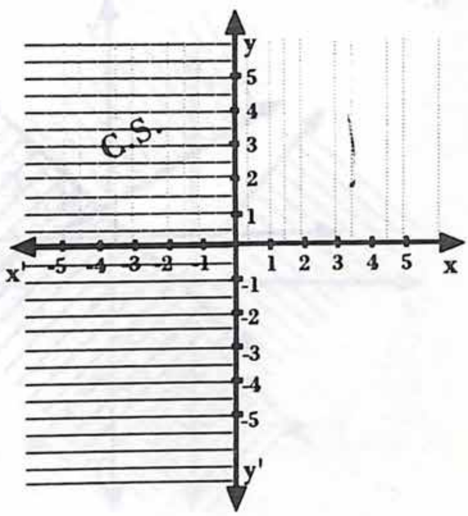
4.-



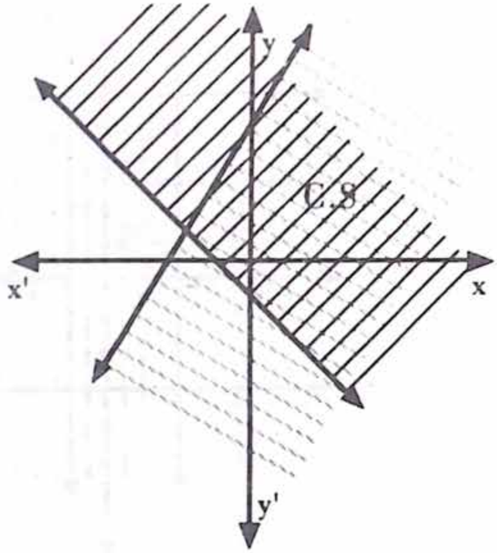
5.-


y
5
4
3
2
1
C.S
x'
-5
-4
-3
-2
-1
2
3
4
5
x
-1
-2
-3
-4
-5
y'

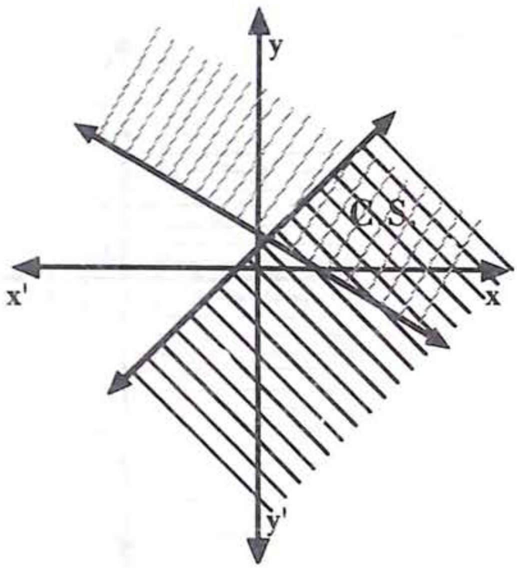
6.-


y
5
4
3
2
1
C.S.
x'
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x
-1
-2
-3
-4
-5
y'

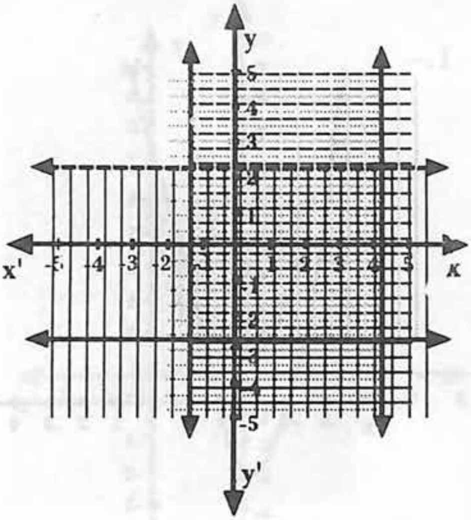
7.-



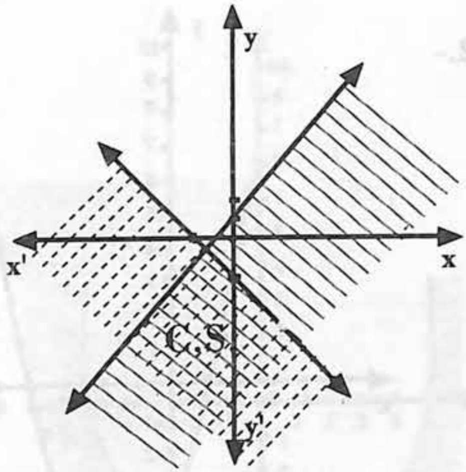
8.-



9.-

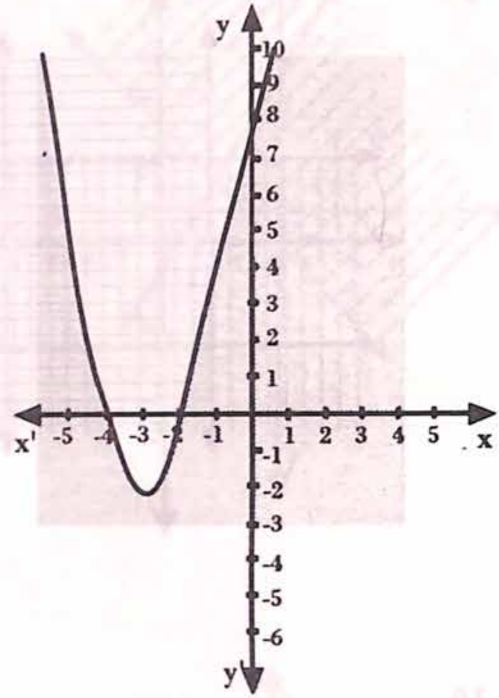


10.-

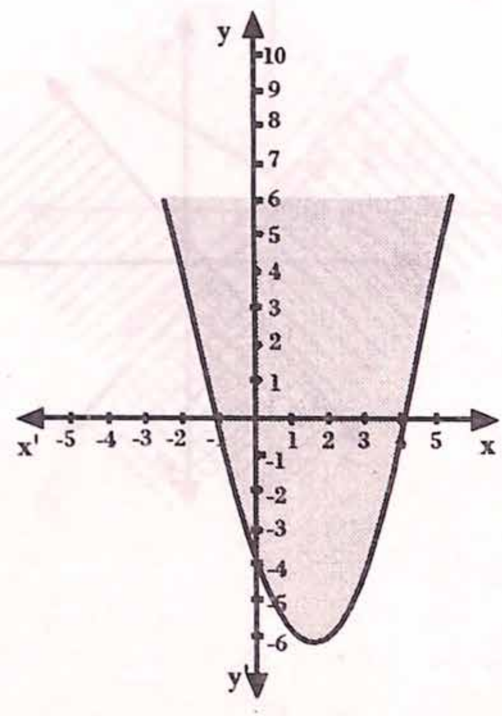


XI.-

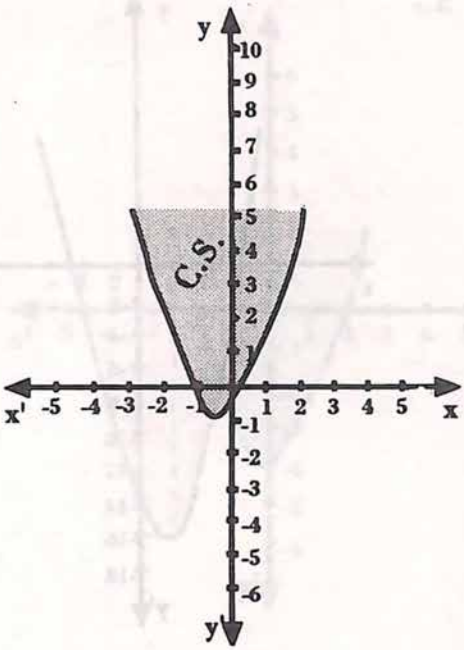
1.-


y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x' -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 x
-1
-2
-3
-4
-5
-6
y'

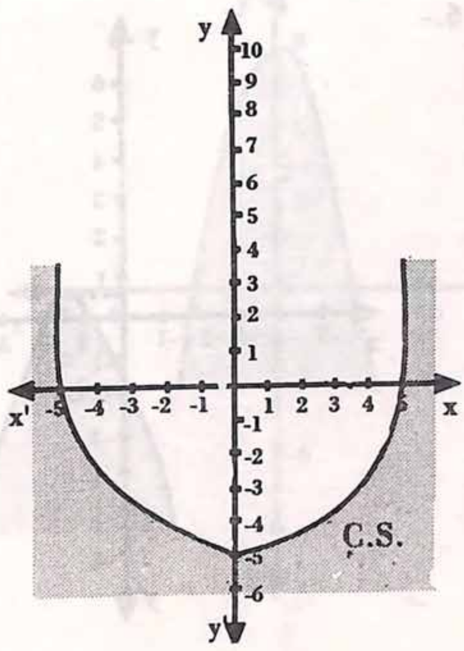
2.-


y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x' -5 -4 -3 -2 1 2 3 5 x
-1
-2
-3
-4
-6
y'

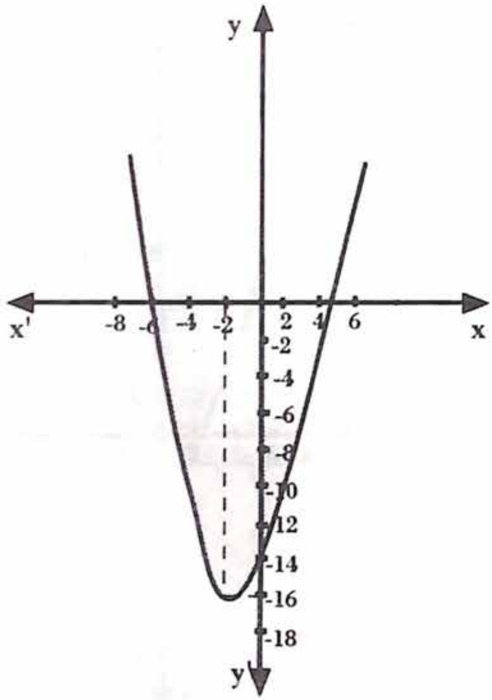
3.-


y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
C.S.
x'
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x
-1
-2
-3
-4
-5
-6
y'

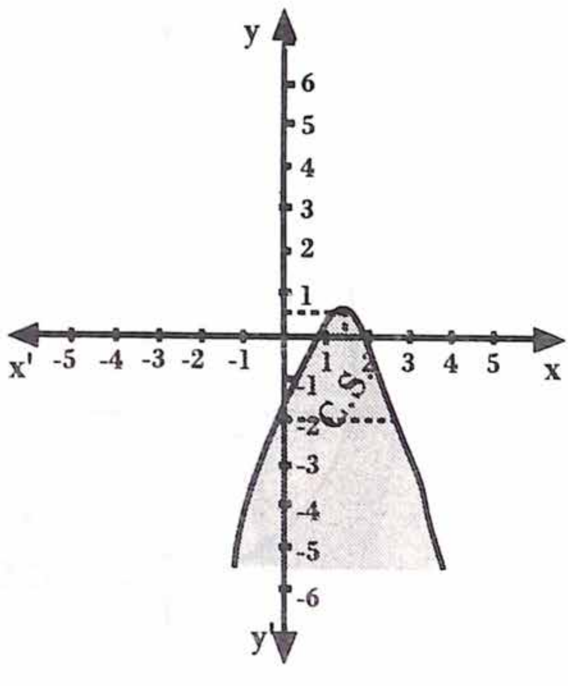
4.-


y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
x'
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x
-1
-2
-3
-4
-5
-6
C.S.
y'

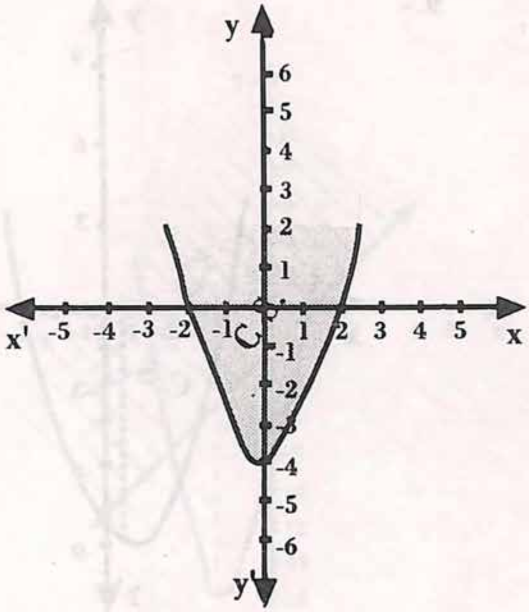
5.-


y
x'
-8
-6
-4
-2
2
4
6
x
-2
-4
-6
-8
-10
12
-14
-16
-18
y'

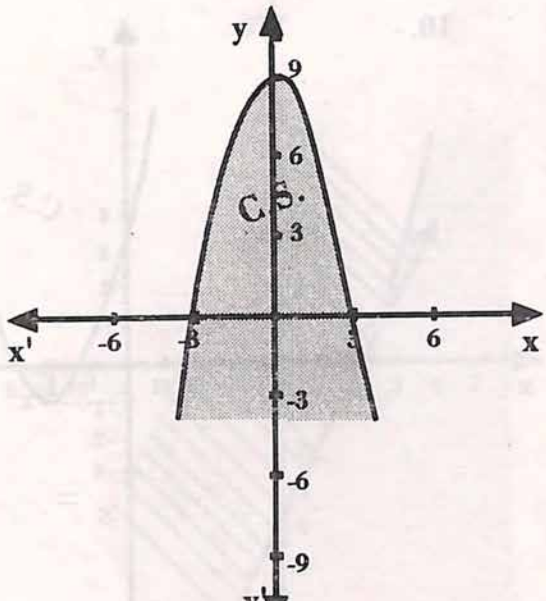
6.-


y
6
5
4
3
2
1
x'
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x
-1
-2
C.S.
-3
-4
-5
-6
y'

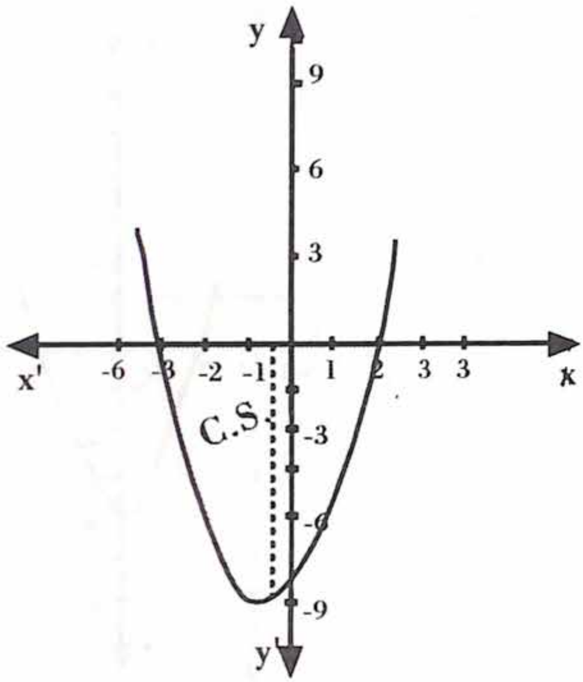
7.-



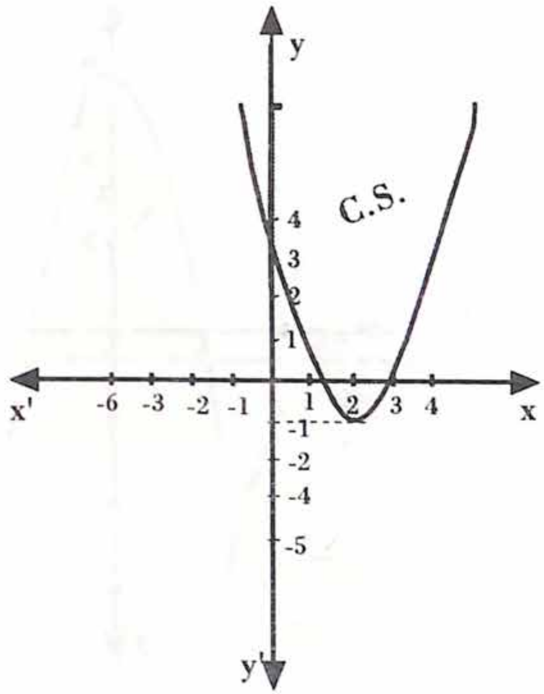
8.-



9.-

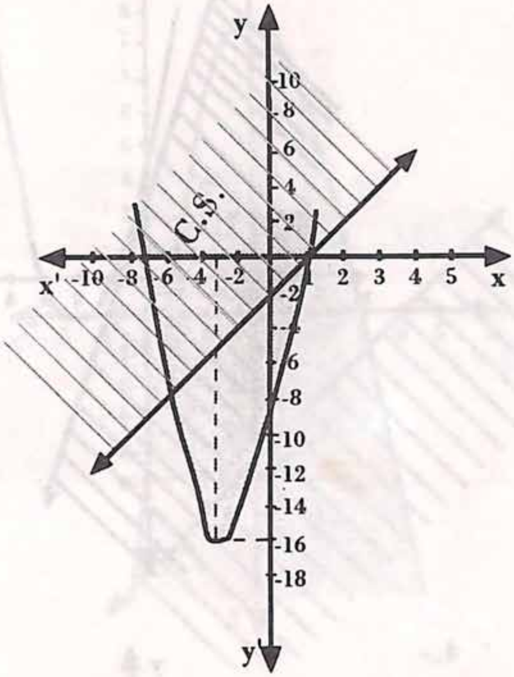


10.-

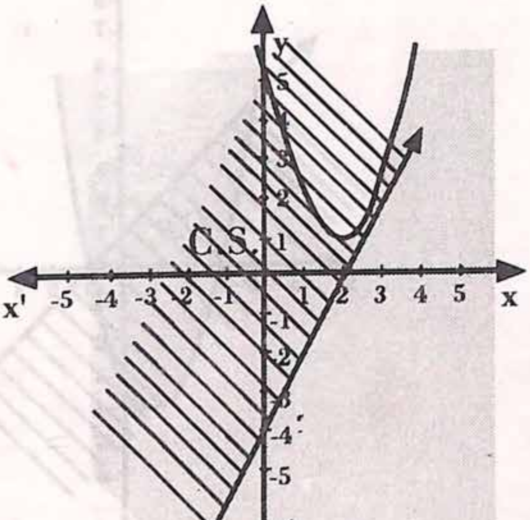


XII.-

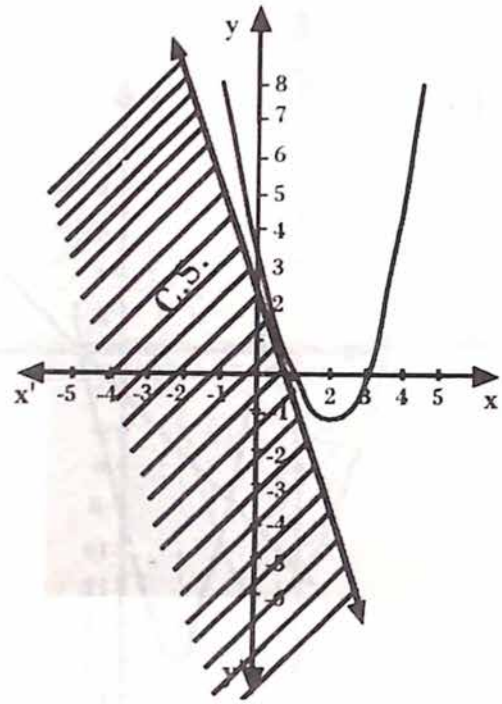
1.-


y
10
8
6
4
2
C.S.
x'
-10
-8
-6
-4
-2
2
3
4
5
x
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
y'

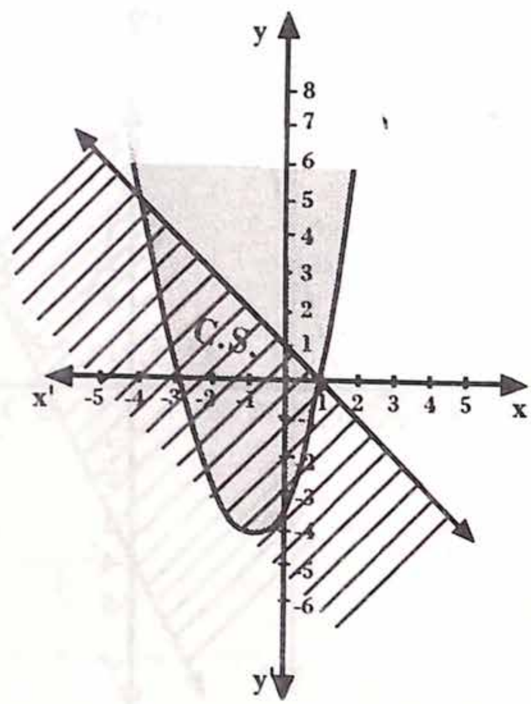
2.-


y
5
4
3
2
1
C.S.
x'
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x
-1
-2
-3
-4
-5
y'

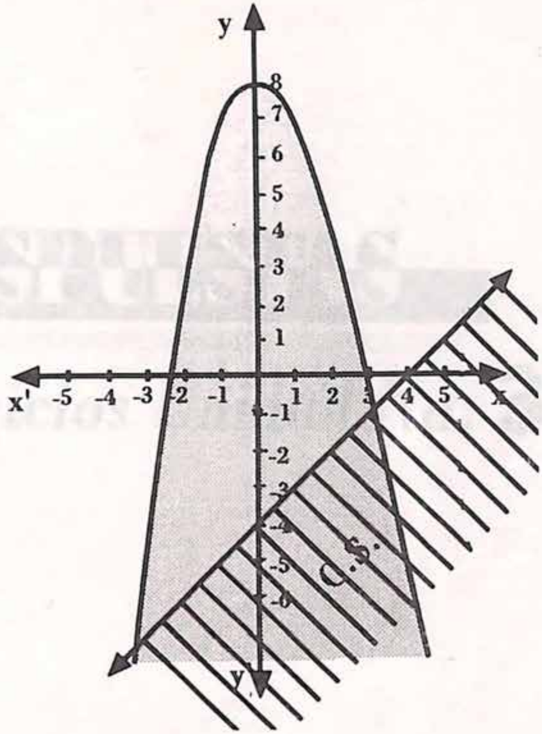
3.-


y
8
7
6
5
4
3
2
C.S.
x'
-5
-4
-3
-2
-1
2
3
4
5
x
-1
-2
-3
-4
-5
-6
y'

4.-


y
8
7
6
5
4
3
2
1
C.S.
x'
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x
-2
-3
-4
-5
-6
y'

5.-



RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 3

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 3

Ejercicio No. 1

I.-

1.- R { (3,6) , (3.9) , (4,4) , (5,5) }

2.- A x B = {(3,6) , (3,8) , (3,5) , (3,9) , (4,6) ,

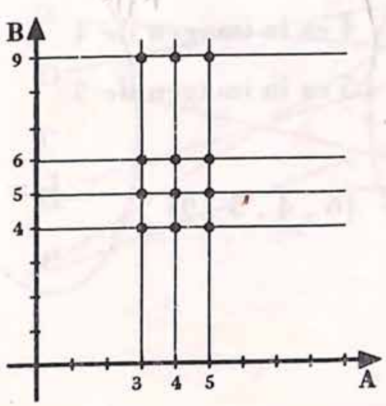
4

(4,9)

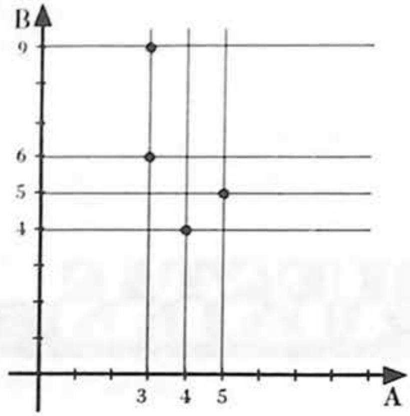
(4,4) , (4,5) , (5,6) , (5,4) , (5,5) , (5,9) }

4,9

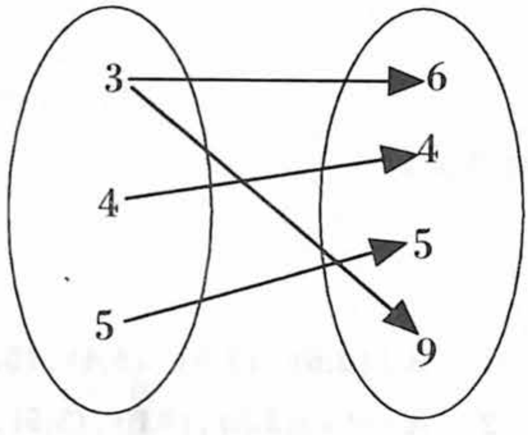
3.-



4.-



5.-



6.- 6 y 9 es la imagen de 3.

4 es la imagen de 4.

5 es la imagen de 5.

7.- {6 , 4 , 5 , 9}

8.- R (3) = 6 y 9

R (4) = 4

R (5) = 5

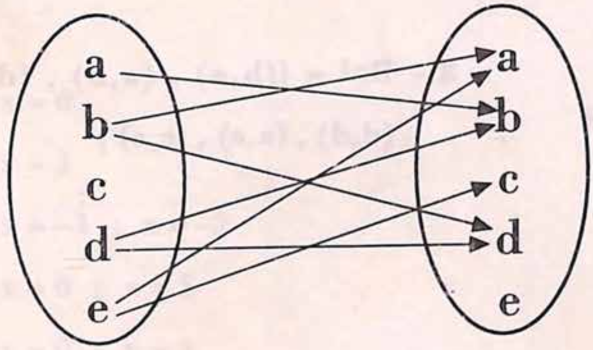
9.- R^{-1} = { (6,3) , (9,3) , (4,4) , (5,5) }

II.-

1.- { (a,a) , (a,b) , (a,c) , (a,d) , (a,e) , (b,a) , (b,b) , (b,c) , (b,d) , (b,e) , (c,a) , (c,b) , (c,c) , (c,e) , (d,a) , (d,b) , (d,c) , (d,d) , (d,e) , (e,a) , (e,b) , (e,c) , (e,d) , (e,e) }

2.- R = { (a,b) , (b,a) , (b,d) , (d,b) , (d,d) , (e,a) , (e,c) }

3.-



4.- la imagen de:

a es b

b es a y d

d es b y d

e es a y c

5.- $R \subset (A \times A)$

6.- $R(a) = b$

$R(b) = a$ y d

$R(d) = b$ y d

$R(e) = a$ y e

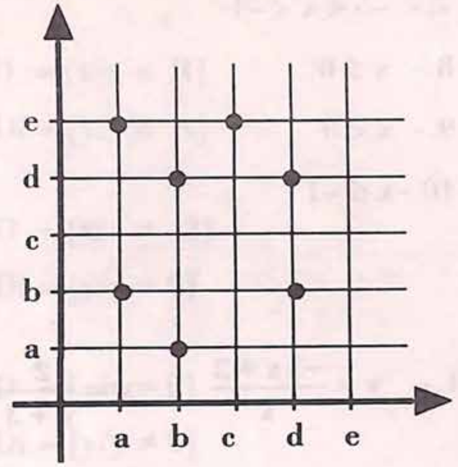
7.- $Dr = \{a, b, d, e\}$

$Di = \{a, b, c, d\}$

8.- $R^{-1} = \{(b,a)\ ,\ (a,b)\ ,\ (d,b)\ ,\ (b,d)$

$(d,d)\ ,\ (a,e)\ ,\ (c,e)\ \}$

9.-



10.- $R^{-1}(a) = b$ y e

$R^{-1}(b) = a\ ,\ d$

$R^{-1}(c) = e$

$R^{-1}(d) = b$ y d

$R^{-1}(e) = \emptyset$

III.-

1.- $x = 0$

2.- $x = 1$

3.- $x = -1$; $x = -2$

4.- $x = 0$; $x = 5$

5.- $x = 0$; $x = 3$

6.- $x < 0$

7.- $-5 < x < -1$

8.- $x \leq 0$

9.- $x < 0$

10.- $x \leq -1$

IV.-

1.- $y = \dfrac{-3x+2}{x}$; $x = \dfrac{2}{y+3}$

2.- $y = \dfrac{1+2x}{2x}$

3.- $x = \dfrac{y-2}{4}$; $y = 4x+2$

4.- $x = \sqrt{25 - y2}$; $y = \sqrt{25 - x2}$

5.- $x = \dfrac{27-2y}{y}$; $y = \dfrac{27}{x+2}$

6.- $x = \dfrac{-3y+5}{4}$; $y = \dfrac{5-4x}{3}$

V.-

1.- $D = \{x / x \in R\}$

$Di = \{y / y \in R\}$

2.- $D = \{x / x \neq -2\}$

$Di = \{y / y \neq 0\}$

3.- $D = \{x / x \neq 0\}$

$Di = \{y / y \neq 0\}$

4.- $D = \{x / -2 \leq x \leq 2\}$

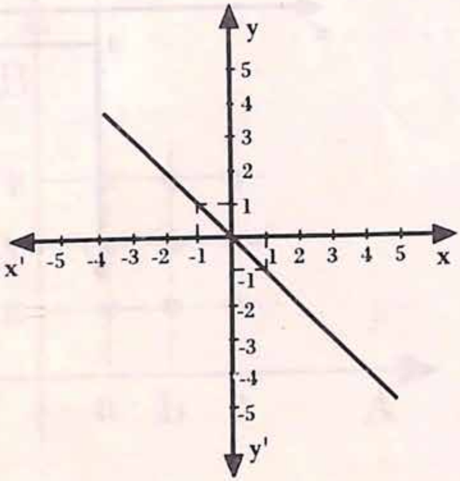
$Di = \{y / -2 \leq y \leq 2\}$

5.- $D = \{x / x \neq 0\}$

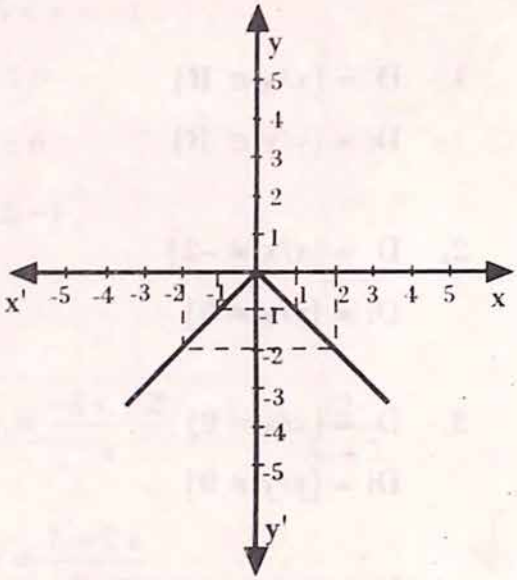
$Di = \{y / y \neq -1\}$

VI.-

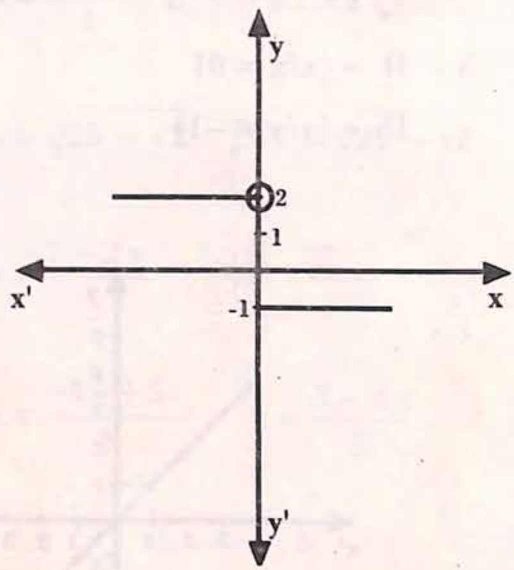
1.-



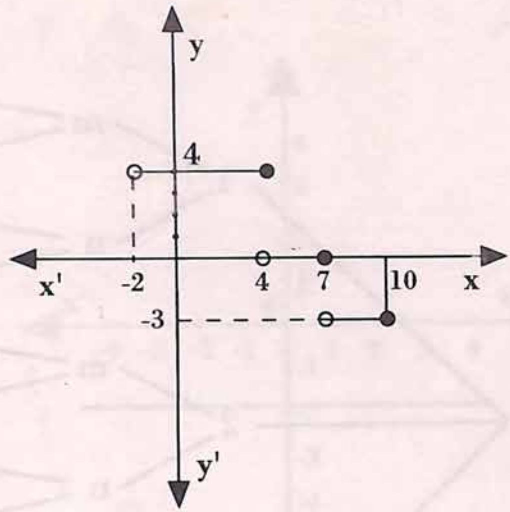
2.-



3.-

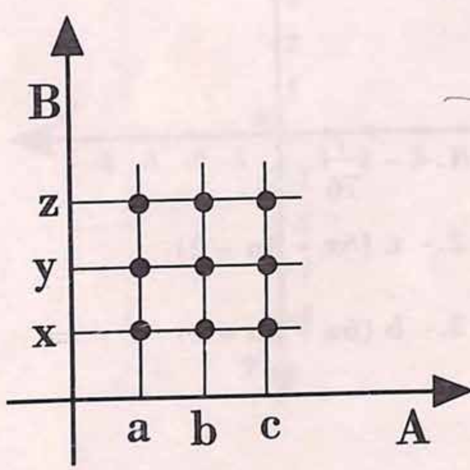


4.-

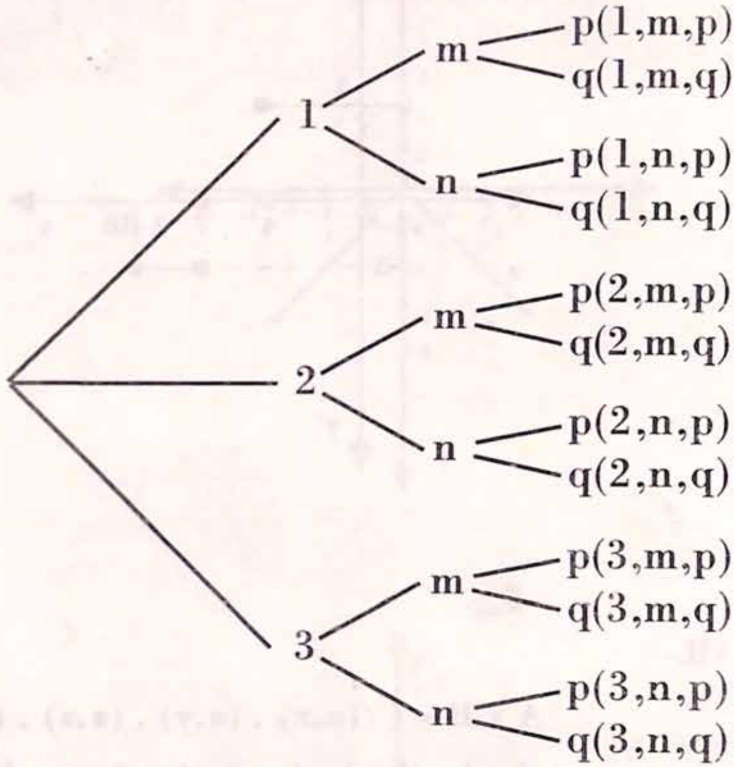


VII.-

A x B = { ((a,x) , (a,y) , (a,z) , (b,x) , (b,y) , (b,z) , (c,x) , (c,y) , (c,z) }



VIII.-



IX.-

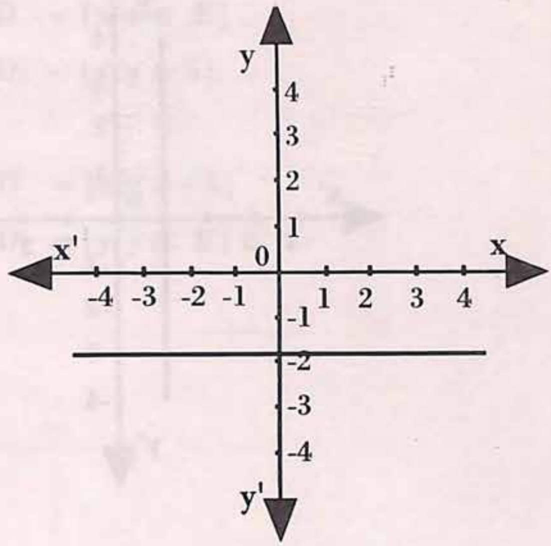
1.- $-\frac{7}{76}$

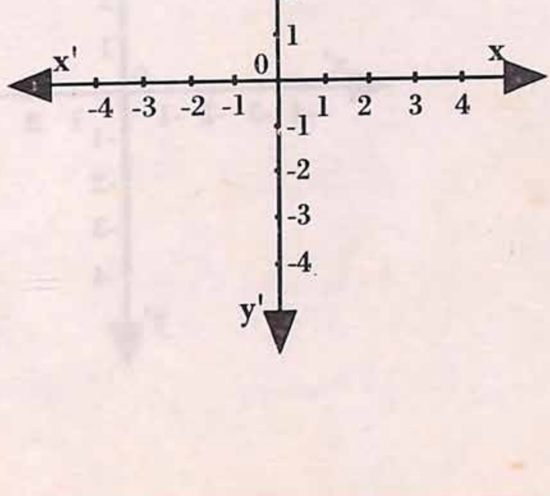
2.- $n\,(6x + 3n - 2)$

3.- $b\,(6a + 3b - 2)$

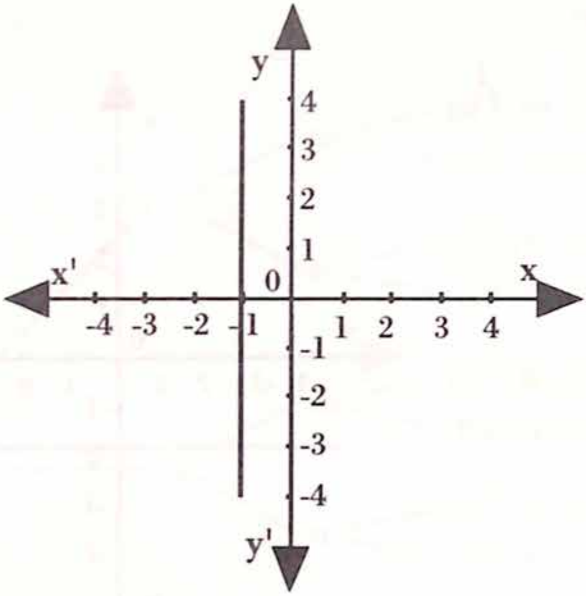
X.-

1.-

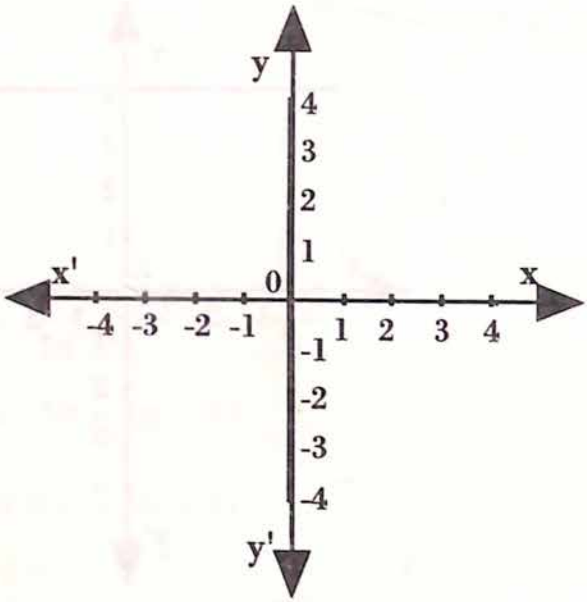




3.-



4.-



XI.-

1.- $D = \{x/x \in R\}$

$Di = \{y/y = 5\}$

2.- $D = \{x/x = -3\}$

$Di = \{y/y \in R\}$

Ejercicio No. 2

I.-

1.- Es función, porque al trazar $\perp$s al eje de las x, éstas cortan a la gráfica en un sólo punto cada una.

2.- No es función, porque al trazar $\perp$s al eje de las x, éstas cortan a la gráfica en más de un sólo punto cada una.

3.- No es función.

4.- Es función.

5.- No es función.

6.- Es función.

7.- No es función.

8.- Es función.

9.- Es función.

10.- Es función.

II.-

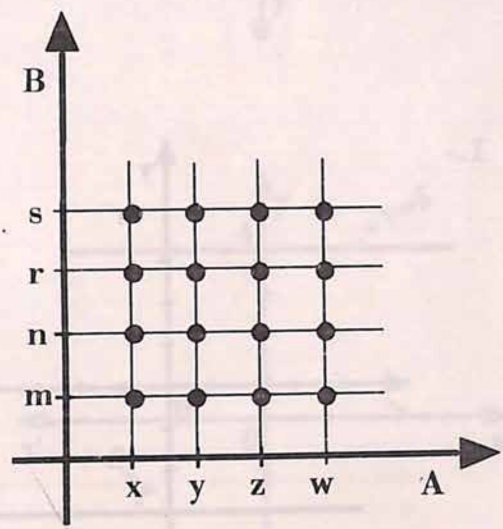
1.- No es biyectiva.

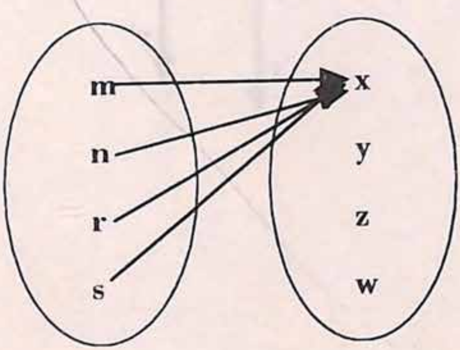
2.- Biyectiva

3.- No es biyectiva.

4.- No es biyectiva.

III.-





Variado

IV.-

1.- Variable

2.- Variable

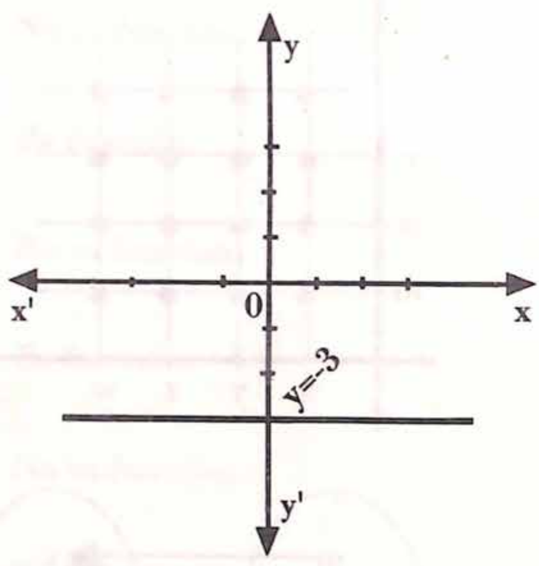
3.- Variable

4.- Variable

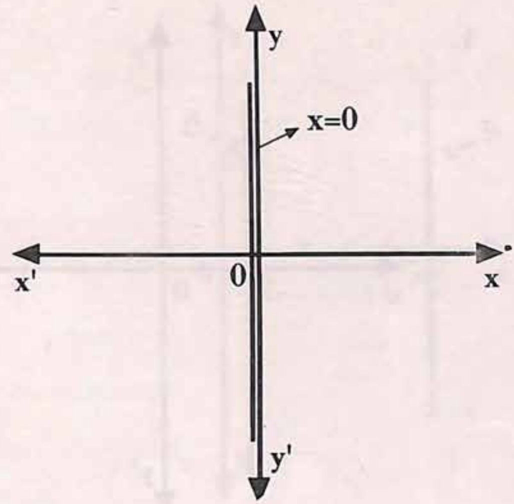
5.- Variable

V.-

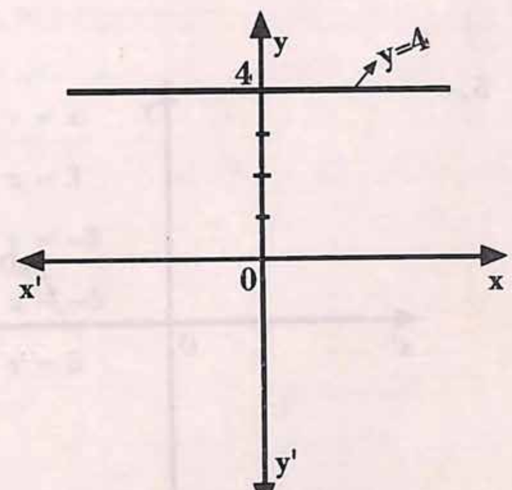
1.-



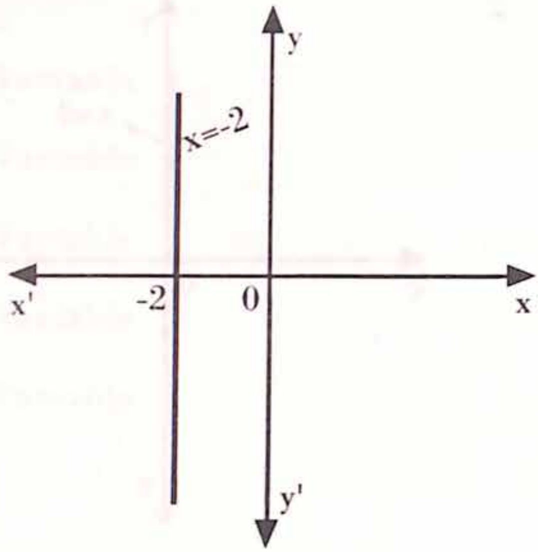
2.-



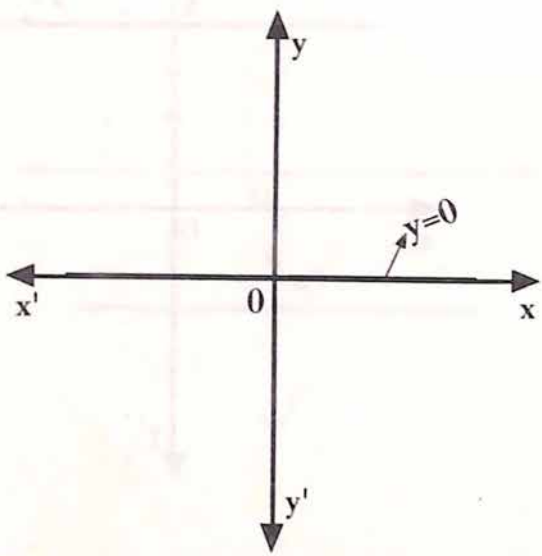
3.-



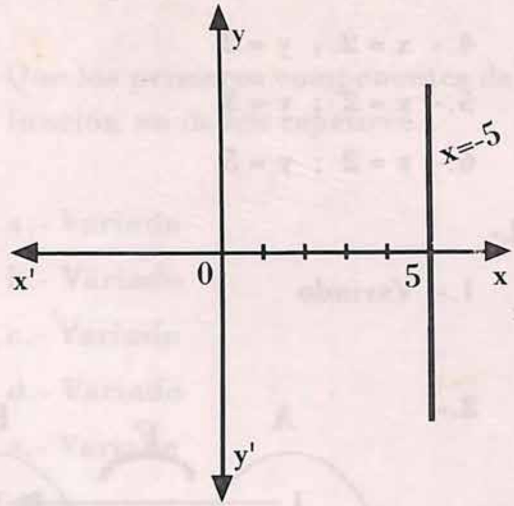
4.-



5.-



6.-



VI.-

1.- $y = x$

2.- $x = 3$

3.- $y = -3$

4.- $x = -4$

5.- $y = 5$

VII.-

1.- $x = 6$; $y = 2$

2.- $x = 2$; $y = 4$

3 - $x = 4$; $y = 2$

4.- $x = 2$; $y = 2$

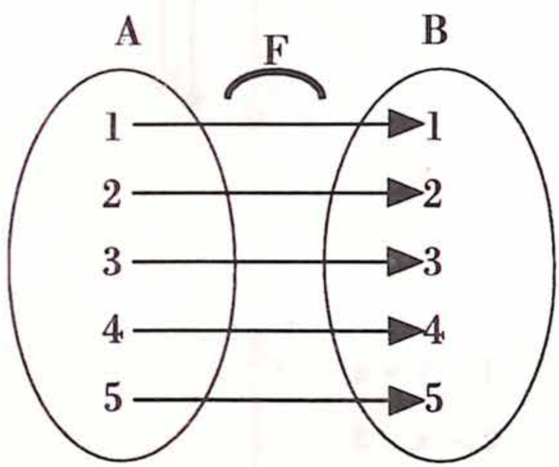
5.- $x = 2$; $y = 3$

6.- $x = 2$; $y = 5$

VIII.-

1.- Variado

2.-



IX.-

1.- **Biyectiva**

2.- a.- $y = \dfrac{x}{3x-2}$

b.- $y = \dfrac{-6-4x}{3}$

X.-

1.- Que los primeros componentes de la función no deben repetirse.

2.- a.- Variado

b.- Variado

c.- Variado

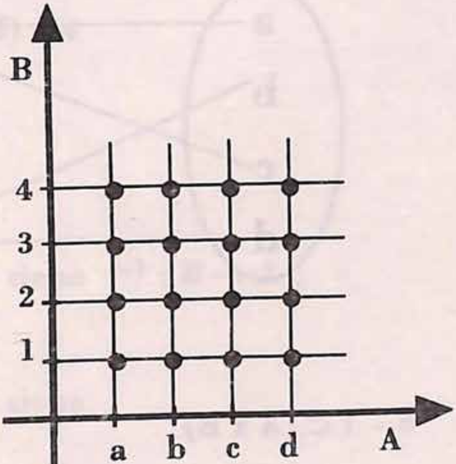
d.- Variado

e.- Variado

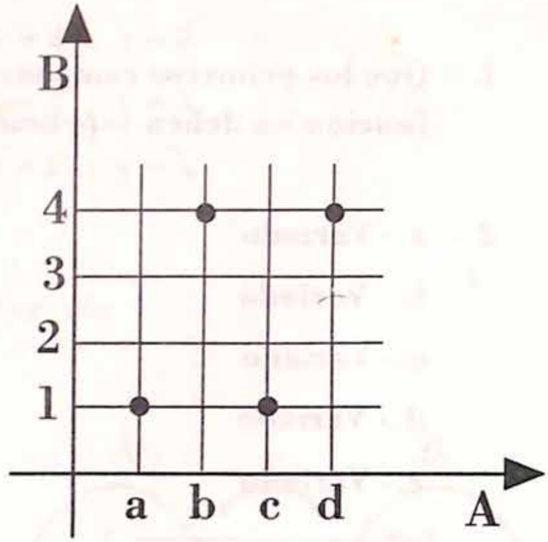
XI.-

1.- A x B = { (a,1) , (a,2) , (a,3) , (a,4) ,
(b,1) , (b,2) , (b,3) , (b,4) ,
(c,1) , (c,2) , (c,3) , (c,4) ,
(d,1) , (d,2) , (d,3) , (d,4) }

2.-

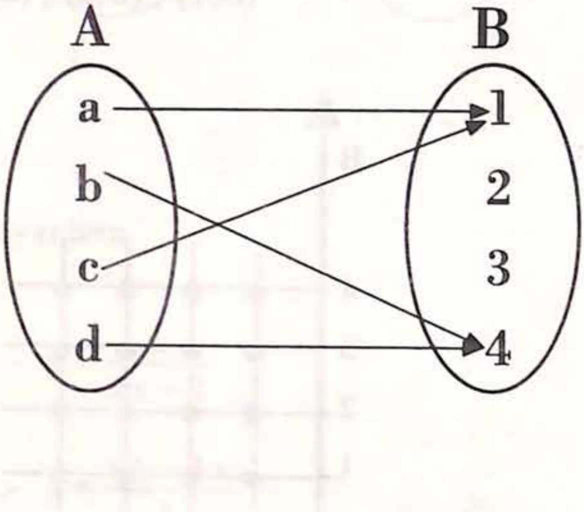


3.-



4.- **Sí, porque las primeras componente de los pares ordenados son diferentes.**

5.-



6.- $f \subset (A \times B)$

7.- Df = {a, b, c, d}

DI = {1, 4}

8.- $f^{-1} = \emptyset$

9.- La imagen de:

a es 1

b es 4

c es 1

d es 4

10.-f (a) = 1

f (b) = 4

f (c) = 1

f (d) = 4

11.-Ø

12.-No tiene $f^{-1} : B \rightarrow A$

13.-No tiene

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 4

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 4

Ejercicio No. 1

I.-

1.- 720

2.- 120

3.- 362,880

4.- 56

5.- 95,04

6.- n

7.- $(n + 3)\ (n + 2)\ (n + 1)\ (n)\ (n - 1)$

8.- $\dfrac{1}{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}$

9.- $(n+2)\,(n+1)\,(n)$

10.- $\dfrac{1}{(n+1)\,n}$

II.-

1.- 720

2.- 720

3.- 840

4.- 40,320

5.- 1,814,400

6.- 42

7.- 9

8.- 7,920

9.- 60

10.-362,880

III.-

1.- $n = 6$

2.- $n = 5$

3.- $n = 6$

4.- $r = 2$

5.- $r = 4$

IV.-

1.- 19,958,400

2.- 32,432,400

3.- 95,040

4.- 40,320

V.-

1.- 24,360

2.- 2,436

3.- 2,106

4.- 21,924

5.- 17,550

VI.-

1.- a.- 60

b.- 125

2.- a.- 36

b.- 75

3.- a.- 24

b.- 50

4.- a.- 12

b.-25

5.- a.- 3

b.- 5

6.- a.- 36

b.- 75

7.- a.- 12

b.- 25

VII.-

64

VIII.-

a.- 362,880

b.- 17,280

c.- 14,400

d.- 5,760

IX.-

a.- 40,320

b.- 4,320

X.-

13,824

XI.-

a.- 4,320

b.- 362,880

XII.-

5,040

XIII.-

a.- 1.- 4

2.- 8

3.- $(2)^x$

b.- 1.- 6

2.- 216

3.- 6^m

XIV.-

41,472

XV.-

3,225,600

XVI.-

a.- 95,040

b.- 2,160

XVII.-

a.- 1,260

b.- 12,600

XVIII.-

a.- 2,520

b.- 181,440

XIX.-

325

XX.-

a.- 24

b.- 18

Ejercicio No. 2

I.-

1.- 28

2.- 35

3.- 1

4.- 8

5.- 9

6.- 21

7.- 165

8.- 210

9.- 924

10.- 15

II.-

1.- $n = 10$

2.- $n = 11$

3.- $n = 13$

4.- $r = 5$

5.- $r = 5$

6.- $r = 5$

III.-

a.- 924

b.- 792

IV.-

56

V.-

3,528

VI.-

286

VII.-

1.- 455

2.- 91

VIII.-

1.- 84

2.- 10

3.- 30

4.- 84

5.- 80

6.- 10

7.- 74

IX.-

a.- 1,287

b.- 252

c.- 531

d.- 531

X.-

25,200

XI.-

a.- 6,306,300

b.- 3,150

XII.-

a.- 560

b.- 69,300

XIII.-

a.- 6,306,300

b.- 3,783,780

XIV.-

1.- 495

2.- 117

XV.-

a.- 5,005

b.- 4,290

c.- 715

Ejercicio No. 3

I.-

1.- $27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3$.

2.- $625x^4 - 500x^3y + 150x^2y^2 - 20xy^3 + y^4$

3.- $x^5 + 20x^4y^3 + 160x^3y^6 + 640x^2y^9 +$
$1280xy^{12} + 1024y^{15}$

4.- $64x^{12} - 576x^{10}y^3 + 2160x^8y^6 - 4320x^6y^9 +$
$4860x^4y^{12} - \cancel{1166x}^6y^{15} + 729y^{18}$
2916

5.- $16x^{16} + 96x^{12}y^5 + 216x^8y^{10} + 216x^4y^{15} +$
$81y^{20}$

6.- $\frac{27}{8}x^9 + x^6y + \frac{9}{2}x^6y^2 + 2x^3y^4 - \frac{8}{27}y^6$

7.- $\frac{1}{16}x^8 + x^6y + 6x^4y^2 + 16x^2y^3 + 16y^4$

8.- $x^{\frac{5}{2}} - 10x^2y^{\frac{1}{3}} + 40x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{2}{3}} - 80xy + 80x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{4}{3}} - 32y^{\frac{5}{3}}$

9.- $16x^{\frac{4}{3}} + 32xy^{\frac{1}{2}} + 216x^{\frac{2}{3}}y + 216x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{3}{2}} + 81y^2$

10.- $729x^4 - 4374x^{\frac{10}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 10935x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

$-14580x^2y + 10935x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}} - 4374x^{\frac{2}{3}}$

$+729y^2$

II.-

1.- $720x^4y^9$

2.- $54x^2y^6$

3.- $\dfrac{11,520}{x^2}$

4.- $240x^6y^8$

5.- $1,451,520x^8y^{12}$

6.- $85,257,536x^{15}y^{10}$

7.- $489,888x^5y^4$; $-326,592x^4y^5$

8.- $0.0198x^6y^5$; $0.029x^5y^6$

9.- $-2,187y^{14}$

10.- x^{24}

11.- $r = 3$; $160x^6y^9$

12.- $r = 5$; $14/27x^{12}y^5$

13.- $r = 6$; $2{,}268x^6y^6$

14.- $r = 4$; $481{,}152x^6y^4$

15.- $r = 1$; $-576x^{15}y^{12}$

16.- $r = 3$; $-2x^2y^9/27$

III.-

1.- $243x^{10} + 405x^8y + 270x^6y^2 + 90x^4y^3 +$
$15x^2y^4 + y^5$

2.- $4{,}096a^{18} - 12{,}288a^{15}y^2 + 15{,}360a^{12}y^4 -$
$10{,}240a^9y^6 + 3{,}840a^6y^8 - 768a^3y^{10} + 64y^{12}$

3.- $x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$

4.- $27x^6 - 108x^4y^3 + 144x^2y^6 - 64y^9$

5.- $\frac{x^5}{32} - \frac{15}{32}x^4y + \frac{45}{16}x^3y^2 - \frac{135}{16}x^2y^3$
$+\frac{405}{32}xy^4 - \frac{243}{32}y^5$

IV.-

1.- $16 = 16$

2.- $120 = 120$

V.-

1.- $256x^4 - 512x^3y^2 + 384x^2y^4 - 128xy^6 + 16y^8$

2.- $27x^6 + 54x^4y^3 + 36x^2y^6 + 8y^9$

3.- $1{,}024x^5 + 3{,}840x^4y^4 + 5{,}760x^3y^8 + 4{,}320x^2y^{12} + 1{,}620xy^{16} + 243y^{20}$

4.- $64x^{12} - 192x^{10}y^2 + 240x^8y^4 - 160x^6y^6 + 60x^4y^8 - 12x^2y^{10} + y^{12}$

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 5

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 5

Ejercicio No. 1

I.-

1.- Sí, porque d = 4

2.- No

3.- No

4.- No

5.- Sí, porque d = 3x + 2

6.- No

7.- Sí, d = 2

8.- Sí, d = 3

9.- No

10.- No

II.-

Variado

III.-

1.- 13

2.- –23

3.- 36

4.- 2

5.- –2

IV.-

a.- El término 11 es 9 y $S_{11} = 44$

V.-

a.- $a_{15} = 194$

b.- $S_{15} = 1,282.5$

VI.-

$a_7 = 23$

$s_{15} = 390$

VII.-

1.- $a_n = \frac{2}{n} s_n - a_1$

2.- $a_1 = \frac{Sn}{n} - \frac{nd}{2} + \frac{d}{2}$

3.- $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$

4.- $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$

VIII.-

1.- $a_1 = 4$

2.- $s_n = 63$

IX.-

1.- 12, 15, 18, 21, 24

2.- 2, 10, 18, 26

3.- 53/48, 37/24, 95/48, 29/12, 137/48, 79/24, 179/48

4.- 6/7, –16/7, –38/7, –60/7, –82/7, –104/7, 1, –2, –5, –8, –11, –14

5.- –3, –1, 1, 3, 5

X.-

a.- n^2

b.- $n + n^2$

XI.-

1.- 255

2.- –374

XII.-

1.- 8

2.- –2

3.- $\dfrac{m + n}{2}$

4.- x

XIII.-

1.- 33

2.- 83

3.- 2 y 10

XIV.-

Sea:

$a_1 + d$; $a_1 + 2d$; $a_1 + 3d$, donde al 1er. término y d la diferencia. 2do. término $a_2 = a_1 + d$ y 3er. término $a_3 = a_1 + 2d$.

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$$

XV.-

1.- 6, 9, 12

2.- 50, 90, 130

Ejercicio No. 2

I.-

1.- 1/8

2.- 38

II.-

9 y 3

III.-

3

IV.-

1/15

V.-

$x = 3$

VI.-

1.- 48/5

2.- -15

3.- $\dfrac{2pq}{p+q}$

4.- $\dfrac{p^2 - q^2}{p}$

5.- $-\dfrac{288}{25}$

VII.-

$\dfrac{1}{42}$

VIII.-

$\dfrac{1}{38}$

IX.-

1.- $\dfrac{3}{124}$

X.-

1.- 1/7, 1/12, 1/17, 1/22

2.- –1/3, –1, 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/9, 1/11

3.- 1/7 1/10, 1/13, 1/16

4.- 1/3, 1, –1

5.- –1/3, –1, 1 1/3, 1/5, 1/7

Ejercicio No. 3

I.-

Son geométricas 1, 2, 4.

II.-

1.- 1/32

2.- 6,144

3.- 13,122

4.- 128

III.-

1.- 508

2.- 6,560

IV.-

1.- 8

2.- 6

3.- 6

4.- 4

5.- 2a

6.- 10

7.- 10

8.- -10

V.-

3

VI.-

8

VII.-

5 y 20

VIII.-

4 ; $-4/7$

IX.-

1.- pq

2.- xy

IX.-

9 y 4

XI.-

9 y 4

XII.-

1.- 1, 1/2, 1/4, 1/8

2.- 6, 18, 54

3.- 1/3, 2/3, 4/3, 8/3

4.- 1/6, 1/18, 1/54, 1/162

XIII.-

1ro. = 2

10mo. = 1/256

XIV.-

1ro. = 1/4

10mo. = 128

$a_{12} = 512$

Ejercicio No. 4

I.-

1.- $22\frac{1}{2}$

2.- 90

3.- $\frac{4}{9}$

4.- 48

5.- $31\frac{1}{4}$

6.- $28\frac{4}{5}$

7.- $\frac{3}{2}$

8.- $\frac{3}{2}$

9.- $3\frac{3}{4}$

10.- $\frac{5}{9}$

II.-

1.- $\frac{125}{999}$

2.- $2\frac{37}{99}$

3.- $\frac{25}{3,000}$

4.- $2\frac{3}{11}$

5.- $3\frac{14}{99}$

6.- $2\frac{82}{999}$

7.- $2\frac{14}{33}$

8.- $1\frac{17}{99}$

9.- $4\frac{54,121}{999,999}$

10.- $2\frac{601}{999}$

III.-

1.- $x < 0$ y $x > 2$

2.- $-1 > x > 1$

3.- $-1 > x > 1$

4.- $2 < x < 4$

5.- $1 < x < 3$

IV.-

$$40 + 2\sqrt{2}$$

V.-

96

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 6

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 6

Ejercicio No. 1

I.-

1.- $1 + i$

2.- $-11 - 5i$

3.- 2

4.- $3 - 2i$

5.- $24 + 8i$

6.- $-10 + i$

7.- 0

8.- $9 - 3i$

9.- $--1 - 2i$

10.-$2 + 2i$

II.-

1.- $x = -3$; $y = -1$

2.- $x = -2$; $y = -3$

3.- $x = -2$; $y = -3$

4.- $x = 4/3$; $y = -1/9$

5.- $x = 2$; $y = 3$

III.-

1.- $6 - 10\,i$

2.- $16 + 2i$

3.- $-12 + 16\,i$

4.- -9

5.- $-2 + 2i$

6.- -64

7.- -25

8.- -4

9.- $9 + 1 = 10$

10.- $2i$

IV.-

1.- $\dfrac{5 - 14i}{13}$

2.- $\frac{7-i}{5}=\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\ i$

3.- $1+3i$

4.- $\frac{3}{2}i$

5.- $-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

6.- i

7.- $\frac{10}{17}+\frac{11}{17}\ i$

8.- $\frac{1}{5}+\frac{8}{5}\ i$

9.- $\frac{4}{5}-\frac{8}{5}\ i$

10.- 1

V.-

1.- i

2.- -1

3.- $-i$

4.- 1

5.- $-i$

6.- i

7.- -1

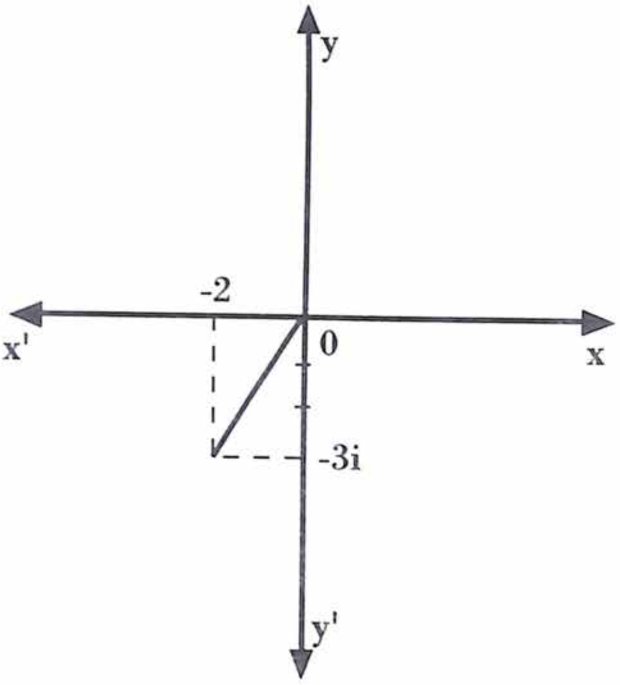
8.- i

9.- $-i$

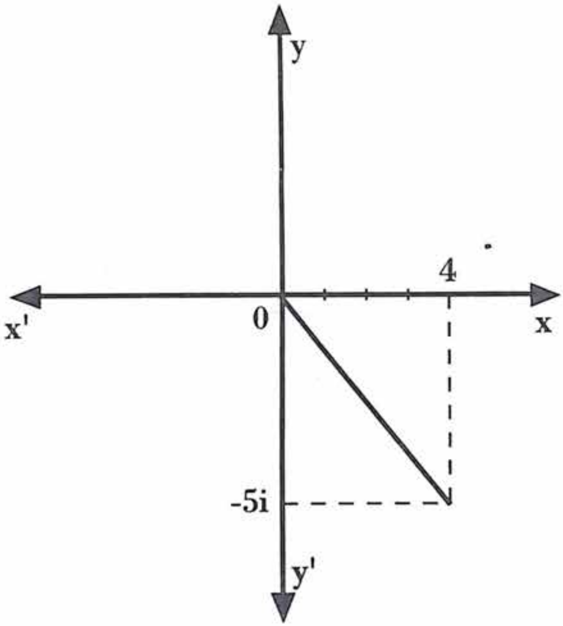
10.- 1

VI.-

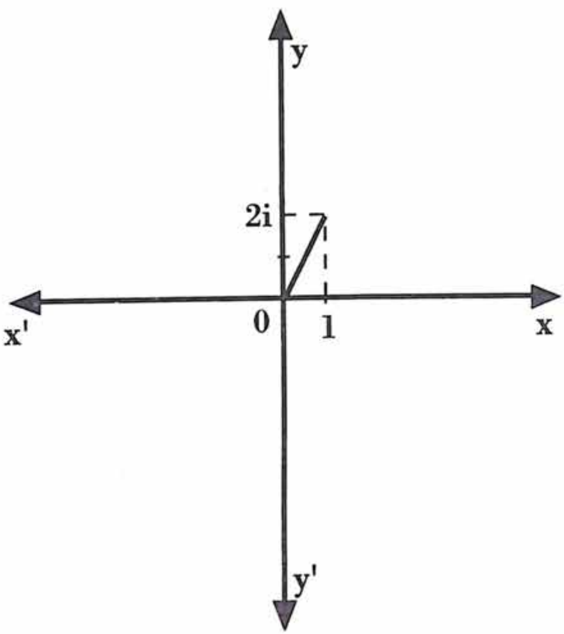
1.-



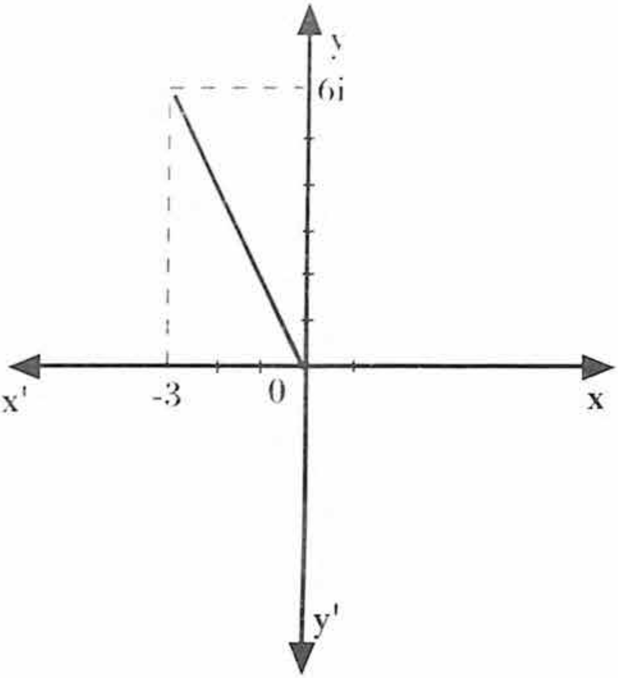
2.-



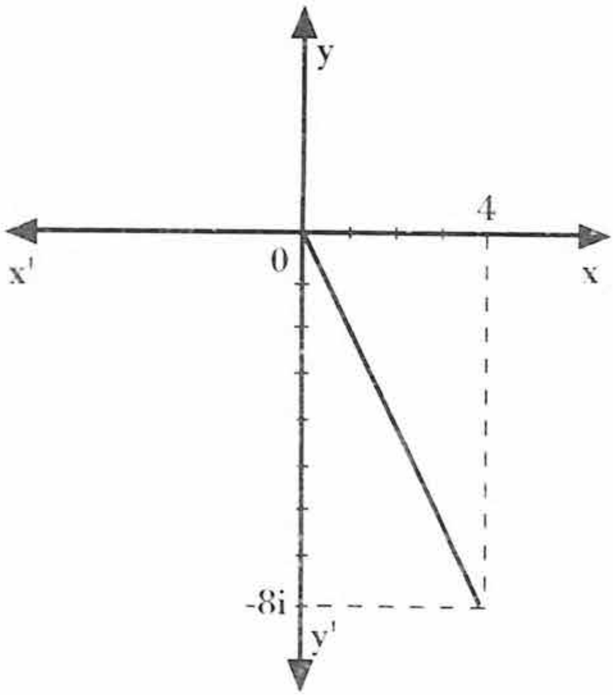
3.-



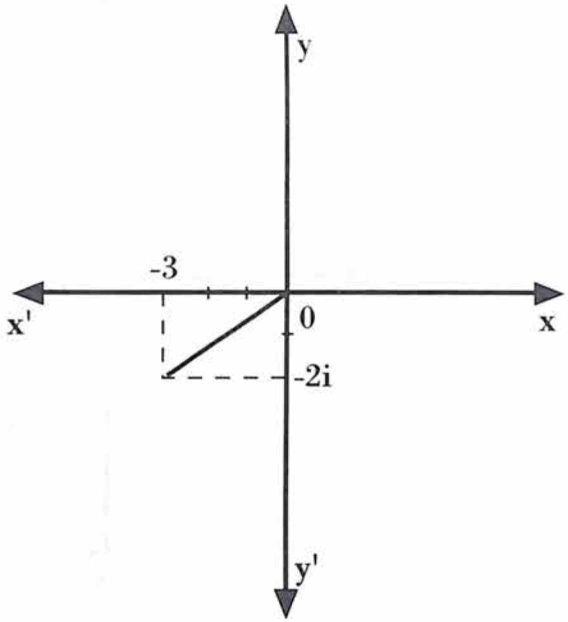
4.-



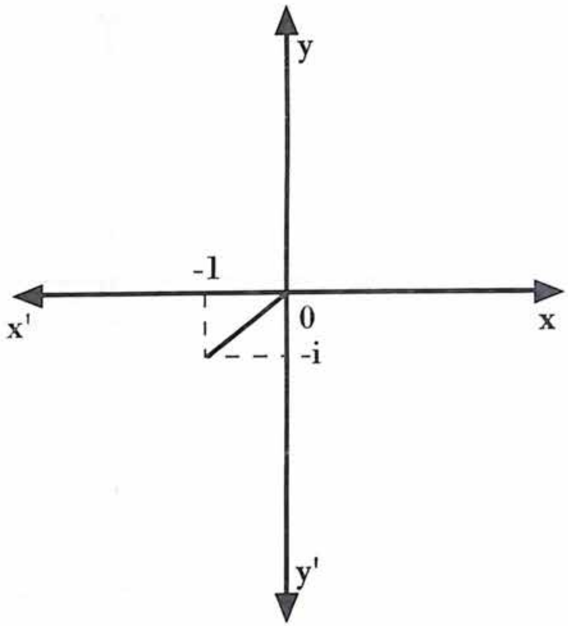
5.-



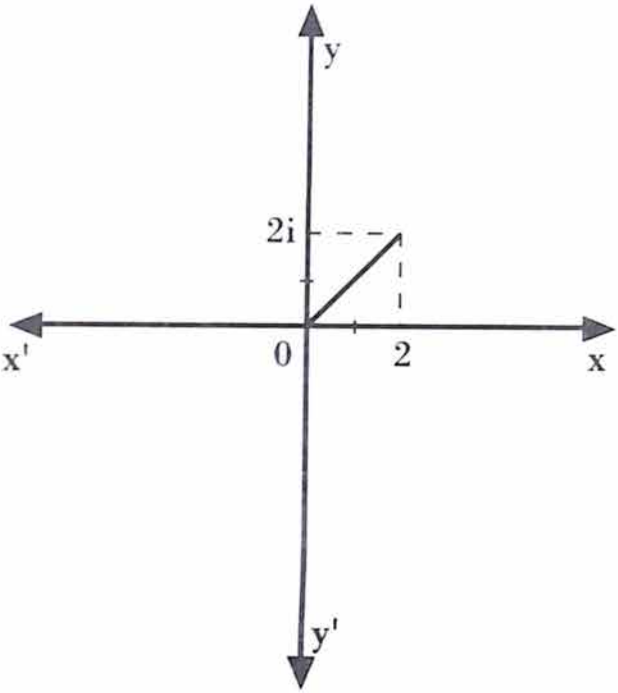
6.-



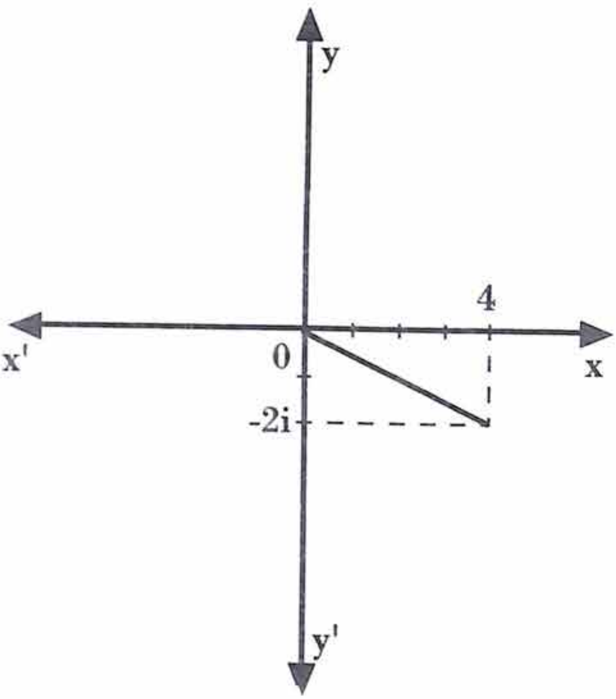
7.-



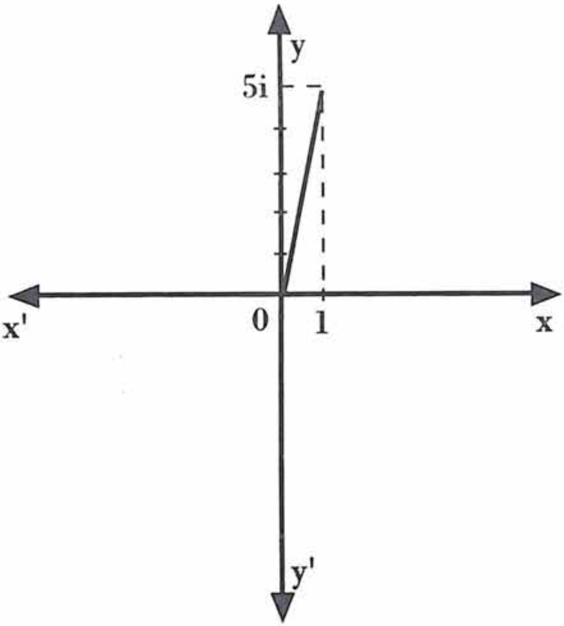
8.-



9.-



10.-



VII.-

1.- $6i$

2.- $\sqrt{3}\ i$

3.- $\sqrt{2}\ i$

4.- $3i$

5.- $5i$

6.- $9i$

7.- $10i$

8.- $7i$

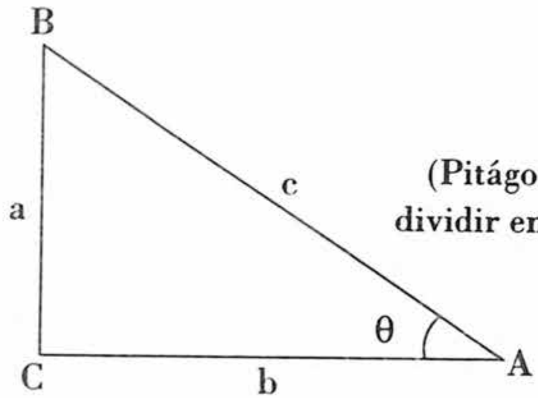
9.- $8i$

10.- $\sqrt{5}\ i$

Ejercicio No. 2

I.-

1.- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$



(Pitágoras)
dividir entre c^2

$$a^2 + b^2 + = c^2$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

2.- $\operatorname{tag}\theta \,.\, \csc\theta = \sec\theta$

$$\frac{s\cancel{e}n\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{s\cancel{e}n\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\sec\theta = \sec\theta$$

3.- $\operatorname{ctg}\theta \,.\, \sec\theta = \csc\theta$

$$\frac{\cancel{c}os\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{1}{\cancel{c}os\theta} = \csc\theta$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$$

$$\csc\theta = \csc\theta$$

4.- $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ despejando

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

5.- $1 + \operatorname{ctg}^2\theta = \csc^2\theta$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$1 + \cot g^2\theta = \csc^2\theta$$

6.- csc θ . cos θ = ctg θ

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\cos\theta=\operatorname{ctg}\theta$$

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\operatorname{ctg}\theta$$

$$\operatorname{ctg}\theta=\operatorname{ctg}\theta$$

7.- sec θ . sen θ = tag θ

$$\frac{1}{\cos\theta}\cdot\operatorname{sen}\theta=\operatorname{tg}\theta$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\operatorname{tg}\theta$$

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\theta$$

8.- csc θ . cos θ = ctg θ

$$\cancel{\operatorname{sen}}\theta\cdot\frac{1}{\cancel{\cos}\theta}\cdot\frac{\cancel{\cos}\theta}{\cancel{\operatorname{sen}}\theta}=1$$

$$1=1$$

9.- $\sec^2\theta \cdot \csc^2\theta = \sec^2\theta + \csc^2\theta$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \sec^2\theta \cdot \csc^2\theta$$

10.- $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}} + \dfrac{\cos\theta}{\dfrac{1}{\cos\theta}} = 1$

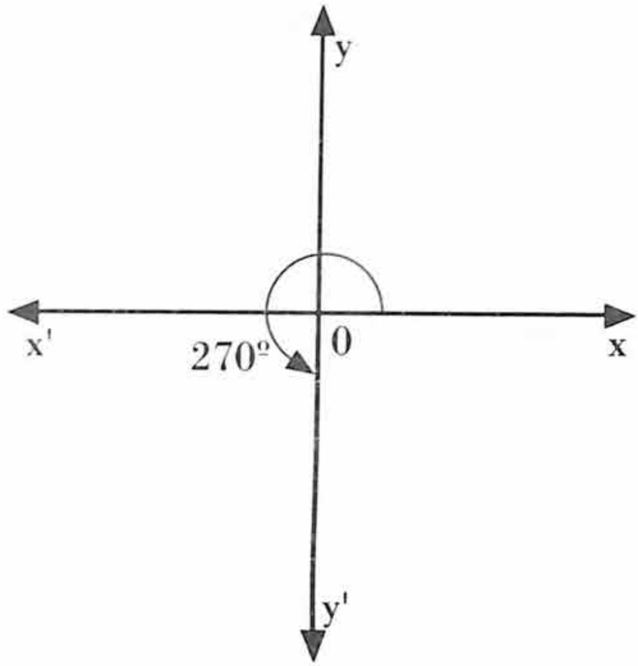
$$\operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{1} + \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{1} = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

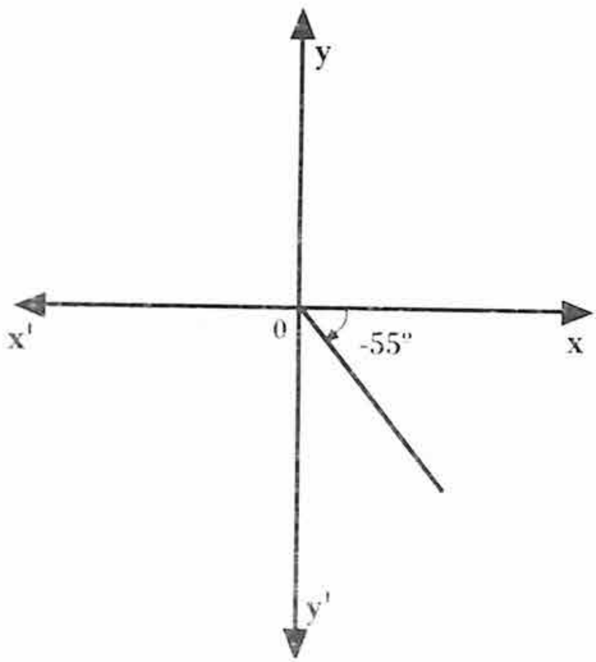
$$1 = 1$$

VI.-

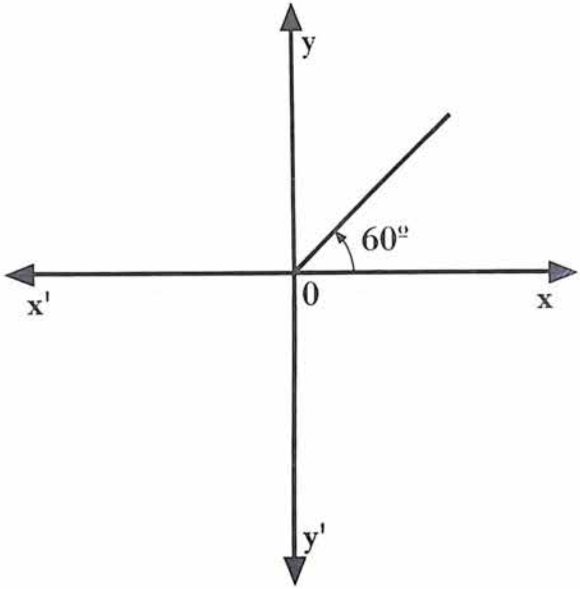
1.-



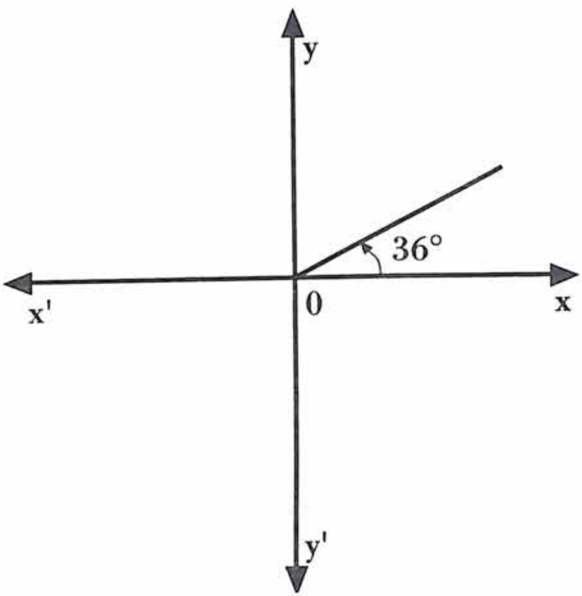
2.-



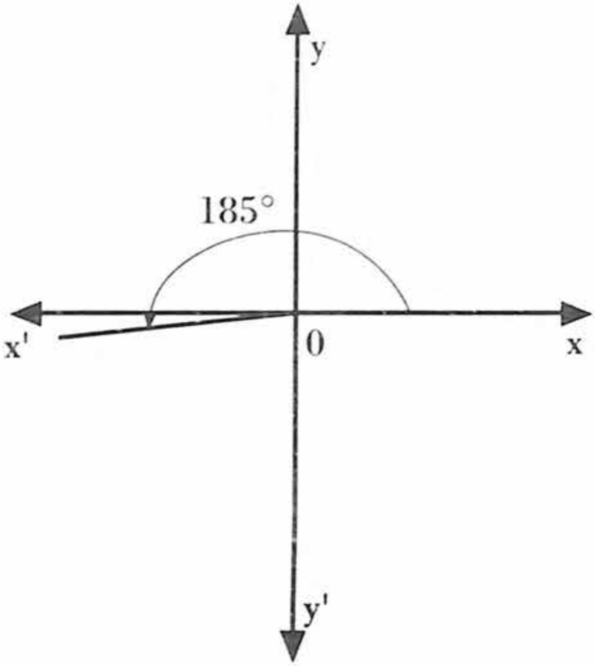
3.-



4.-



5.-



III.-

1.- En el tercer cuadrante.

2.- Parte positiva del eje y.

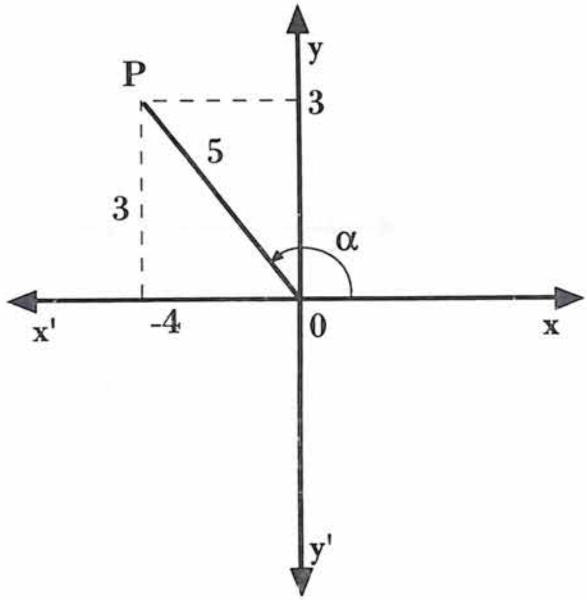
3.- Parte negativa del eje x.

4.- 4to. cuadrante.

5.- 1er. cuadrante.

IV.-

1.-

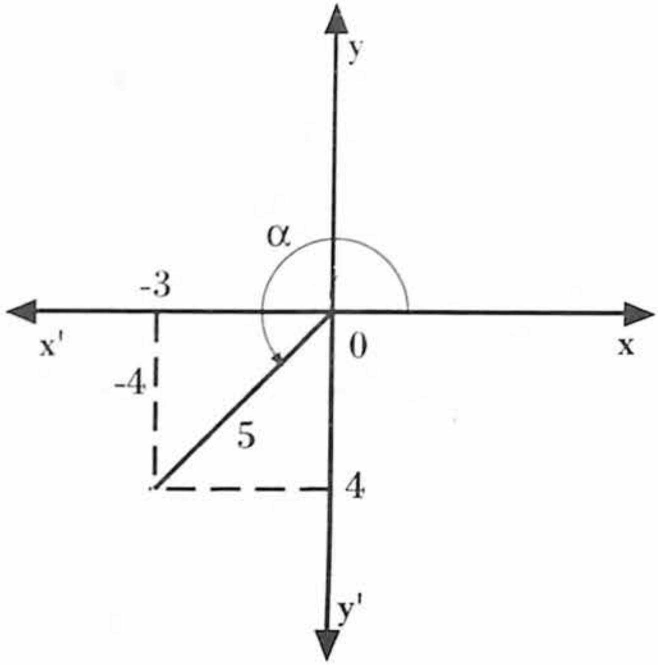


$$\text{sen} = \frac{3}{5} \qquad \cot = -\frac{4}{3}$$

$$\cos = -\frac{4}{5} \qquad \sec = -\frac{5}{4}$$

$$\tan = -\frac{3}{4} \qquad \csc = \frac{5}{3}$$

2.-

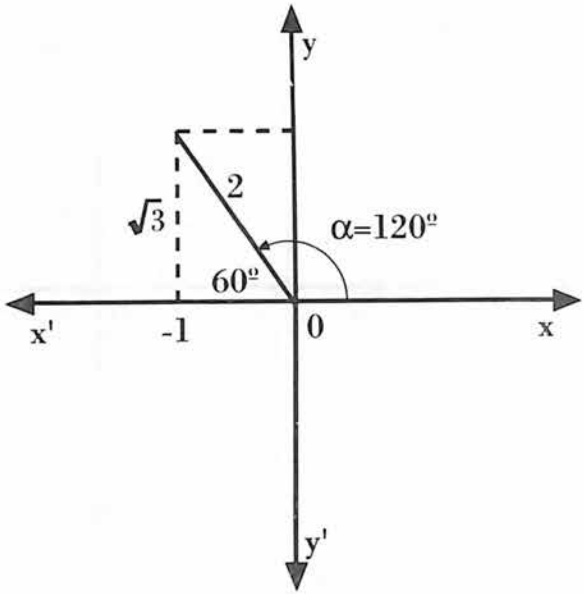


$$\text{sen} = -\frac{4}{5} \qquad \cot = \frac{3}{4}$$

$$\cos = -\frac{3}{5} \qquad \sec = -\frac{5}{3}$$

$$\tan = \frac{4}{3} \qquad \csc = -\frac{5}{4}$$

3.-



$$\text{sen} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos = -\frac{1}{2}$$

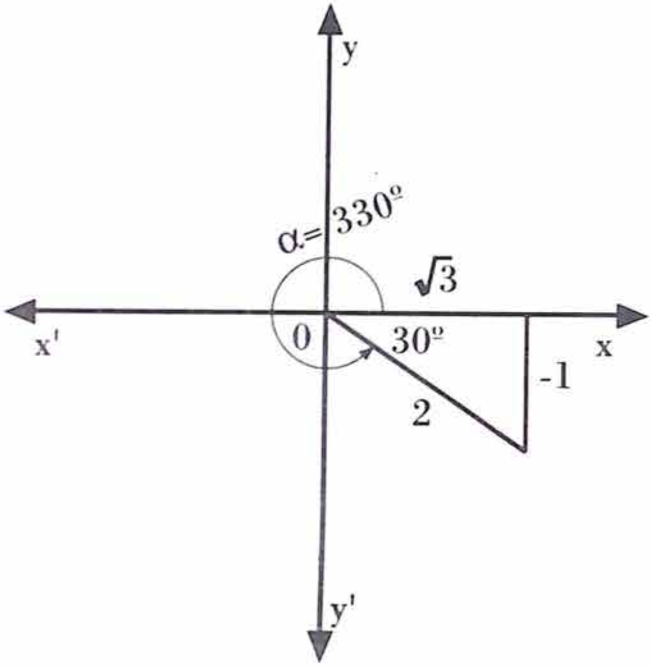
$$\tan = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$\cot = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\csc = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4.-



$$\operatorname{sen} 330° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

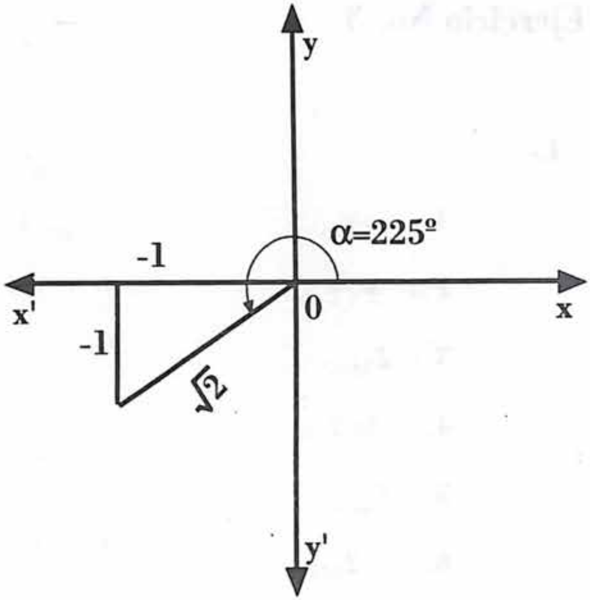
$$\tan 330° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 330° = --\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\sec 330° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 330° = -2$$

5.-



$$\text{sen}\,225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 225° = 1$$

$$\cot 225° = 1$$

$$\sec 225° = -\sqrt{2}$$

$$\csc 225° = -\sqrt{2}$$

V.-

1.- $(-x\ ,\ 0)$

2.- $(0\ ,\ -y)$

Ejercicio No. 3

I.-

1.- $\sqrt{2}_{45°}$

2.- $3\sqrt{2}_{225°}$

3.- $2_{300°}$

4.- $3\sqrt{2}_{315°}$

5.- $2_{135°}$

6.- $\sqrt{2}_{225°}$

7.- $2\sqrt{2}_{315°}$

8.- $2_{60°}$

9.- $2_{300°}$

10.- $2\sqrt{2}_{45°}$

II.-

1.- $3_{180°}$

2.- $4_{270°}$

3.- $5_{0°}$

4.- $5_{90°}$

5.- $7_{270°}$

6.- 4_{180°

7.- 6_{90°

8.- 9_{0°

9.- 4_{270°

III.-

1.- $\sqrt{2}-\sqrt{2}\ i$

2.- $-3+0i=-3$

3.- $-1-i$

4.- $0+2i=2i$

5.- $\sqrt{3}+\ i$

6.- $-2\sqrt{3}-2i$

7.- $\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}$

8.- $-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ i$

9.- $-2 + 2i$

10.- $1 - \sqrt{3}\ i$

IV.-

1.- $8\ (\cos 90^{\circ} + i \operatorname{sen} 90^{\circ})$

2.- $20\ (\cos 70^{\circ} + i \operatorname{sen} 70^{\circ})$

3.- $18\ (\cos 180^{\circ} + i \operatorname{sen} 180^{\circ})$

4.- $24\ (\cos 60^{\circ} + i \operatorname{sen} 60^{\circ})$

5.- $40\ (\cos 60^{\circ} + i \operatorname{sen} 60^{\circ})$

V.-

1.- $2\ (\cos 40^{\circ} + i \operatorname{sen} 40^{\circ})$

2.- $2\ (\cos 115^{\circ} + i \operatorname{sen} 115^{\circ})$

3.- $2\ (\cos 30^{\circ} + i \operatorname{sen} 30^{\circ})$

4.- $2\ (\cos 60^{\circ} + i \operatorname{sen} 60^{\circ})$

5.- $4\ (\cos 150^{\circ} + i \operatorname{sen} 150^{\circ})$

VI.-

1.- $32\ (\cos 50^{\circ} + i \operatorname{sen} 50^{\circ})$

2.- $81\ (\cos 160^{\circ} + i \operatorname{sen} 160^{\circ})$

3.- $32\ (\cos 300^{\circ} + i \operatorname{sen} 300^{\circ})$

4.- $16\ (\cos 180^{\circ} + i \operatorname{sen} 180^{\circ})$

5.- $81\ (\cos 80^{\circ} + i \operatorname{sen} 80^{\circ})$

VII.-

1.- $[2\ (\cos 330^{\circ} + i \operatorname{sen} 330^{\circ})]^4 = 16\ (\cos 1320^{\circ} + i \operatorname{sen} 1320^{\circ}) = 16\ (\cos 240^{\circ} + i \operatorname{sen} 240^{\circ})$

2.- $[2\ (\cos 300^{\circ} + i \operatorname{sen} 300^{\circ})]^3 = 8\ (\cos 900^{\circ} + i \operatorname{sen} 900^{\circ}) = 8\ (\cos 180^{\circ} + i \operatorname{sen} 180^{\circ})$

3.- $[2\ (\cos 225^{\circ} + i \operatorname{sen} 225^{\circ})]^4 = 8\ (\cos 1350^{\circ} + i \operatorname{sen} 1350^{\circ}) = 8\ (\cos 270^{\circ} + i \operatorname{sen} 270^{\circ})$

4.- $\left[2\ \sqrt{2}\left(\cos\ 315^{\circ} + i \operatorname{sen}\ 315^{\circ}\right)\right]^5$

$= 128\sqrt{2}\left(\cos\ 1575^{\circ} + i \operatorname{sen}\ 1575^{\circ}\right)$

$= 128\sqrt{2}\left(\cos\ 135^{\circ} + i \operatorname{sen}\ 135^{\circ}\right)$

5.- $\left[\sqrt{2}\left(\cos\ 45^{\circ} + i \operatorname{sen}\ 45^{\circ}\right)\right]^4$

$= 4\left(\cos\ 180^{\circ} + i \operatorname{sen}\ 180^{\circ}\right)$

VIII.-

1.- $x_1 = 1$; $x_2 = -1$

2.- $x_1 = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i\right)$; $x_2 = -1$

$x_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i$

3.- $x_1 = 1$; $x_2 = i$; $x_3 = -1$; $x_4 = -i$

4.- $x_1 = -0.21 + 0.25\ i$; $x_2 = -0.20 - 0.81\ i$; $x_3 = 1.18 - 0.81\ i$

5.- $x_1 = 1.35 + 0.37\ i$; $x_2 = -0.80 - 1.35\ i$

6.- $x_1 = 1 + \sqrt{3}\ i$; $x_2 = -2$

$x_3 = 1 - \sqrt{3}\ i$

7.- $x_1 = 3$; $x_2 = \dfrac{3}{2} + 3\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i$

$x_3 = \dfrac{-3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\ i$

8.- $x_1 = -0.71 + 1.07\ i$; $x_2 = 1.07 + 0.71\ i$

$x_3 = -0.71 - 1.07\ i$; $x_4 = -1.07 + -0.71\ i$

9.- $x_1 = 1.6 + 1.16\ i$; $x_2 = -0.62 + 1.9\ i$;

$x_3 = -2$; $x_4 = -0.62 + 1.9\ i$;

$x_5 = 1.62 - 1.08\ i$

10.- $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\ i$; $x_2 = 0 + i$

$x_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\ i$; $x_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\ i$

$x_5 = 0 - i$; $x_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\ i$

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 7

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 7

Ejercicio No. 1

I.-

1.- 438

2.- 68

3.- 2

4.- –4

5.- 9

6.- –541

7.- 914

8.- –4

II.-

3.- Es factor

III.-

1.- $2a^n$

2.- 0

3.- 0

4.- 0

5.- $2a^n$

6.- $2a^n$

7.- 0

8.- $-2a^n$

IV.-

1.- $x^3 - 9x^2 + 31x - 96$; $R = 287$

2.- $2x^3 + 5x^2 + 15x + 42$; $R = 122$

3.- $3x^3 - 4x^2 - 5x - 2$; $R = 0$

4.- $x^3 - 2x^2 - 15x + 36$; $R = 0$

5.- $2x + 1$; $R = 3$

6.- $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 40x + 162$; $R = -651$

7.- $x^2 + x + 1$; $R = 0$

8.- $x^4-x^3+x^2-x+1$; $R = 0$

9.- $x^2 - 4x - 11$; $R = -24$

10.- $4x^3 + 13x^2 + 52x + 206$; $R = 827$

V.-

1.- $K = 19$

2.- $K = 33$

3.- $k = 8.\overline{3}$

4.- $k = -22$

VI.-

1.- $a = 5$
$b = 6$

2.- $a = 2$; $b = -9$

VII.-

1.- Es raíz

2.- No es raíz

3.- No es raíz

4.- No es raíz

5.- No es raíz

VIII.-

1.- 3 y –2

2.- 1 y –4

3.- 3 y –2

4.- $(x + 3)$ y $(x + 1)$

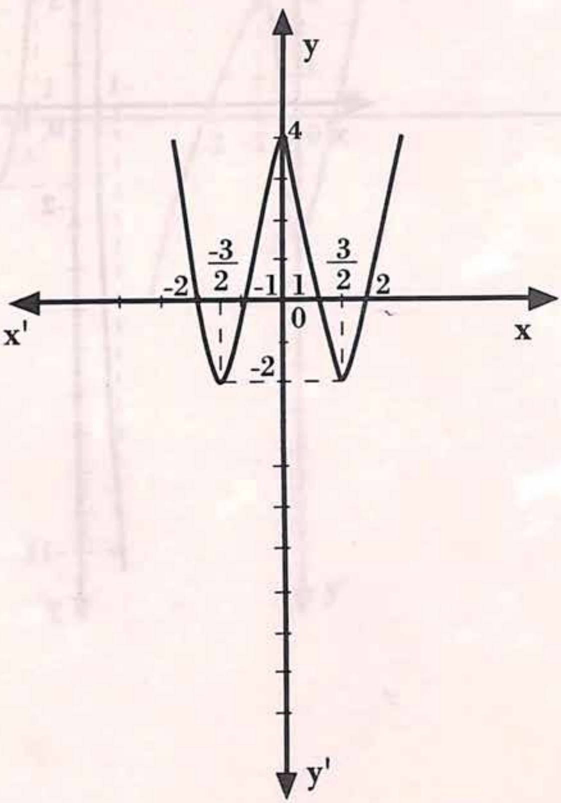
5.- $(x - 3)$ y $(x + 1)$

6.- No son factores

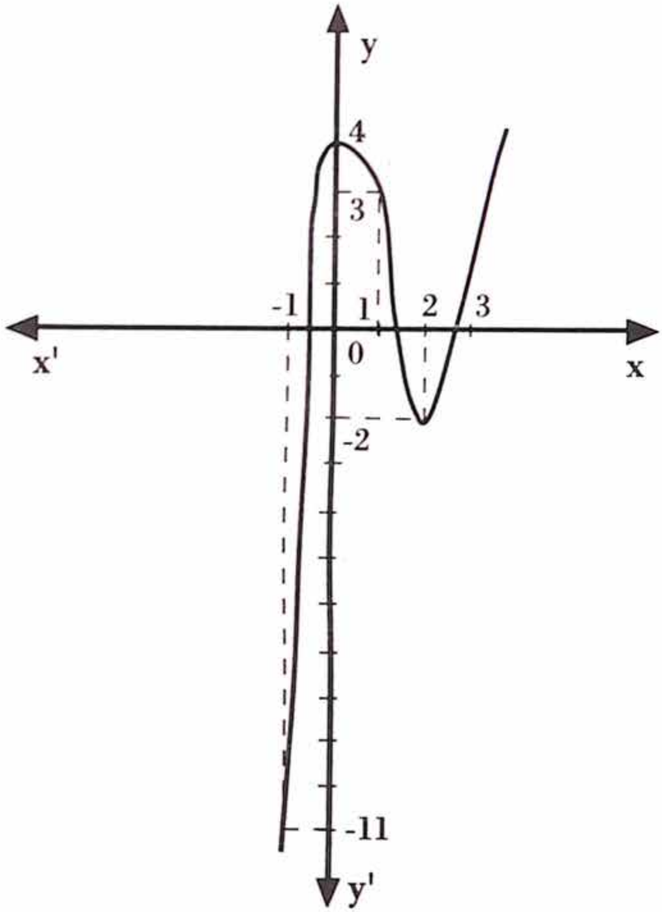
Ejercicio No. 2

I.-

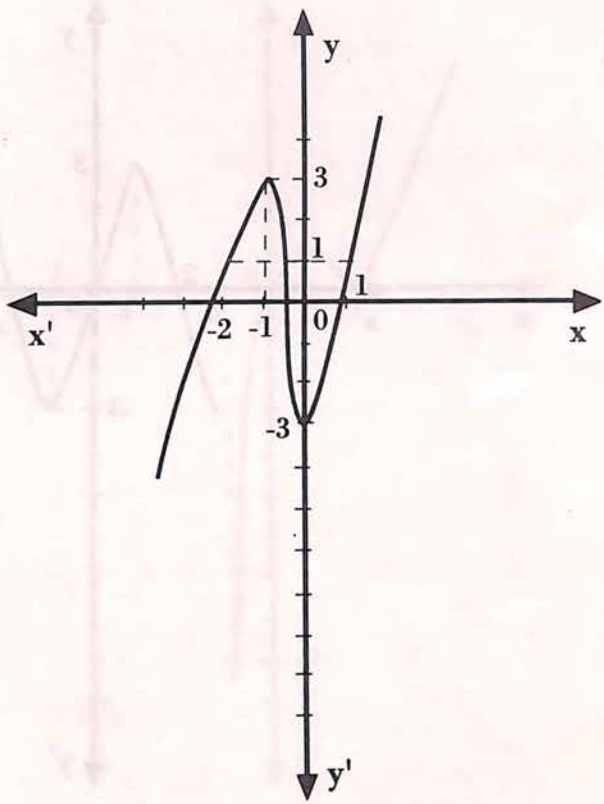
1.- $y = x^4 - 5x^2 + 4$



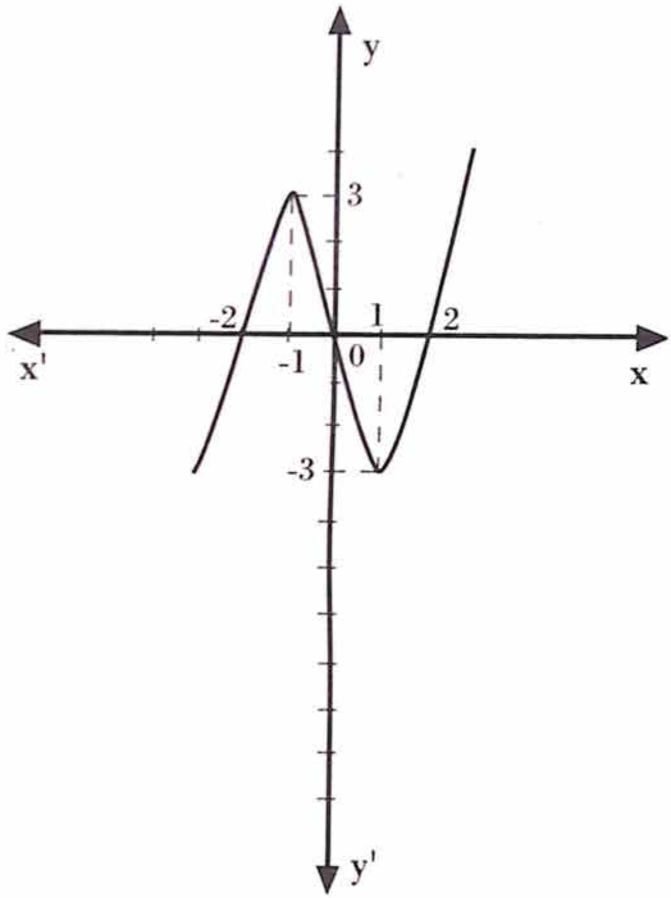
2.- $y = x^4 - 9x^2 + 7x + 4$



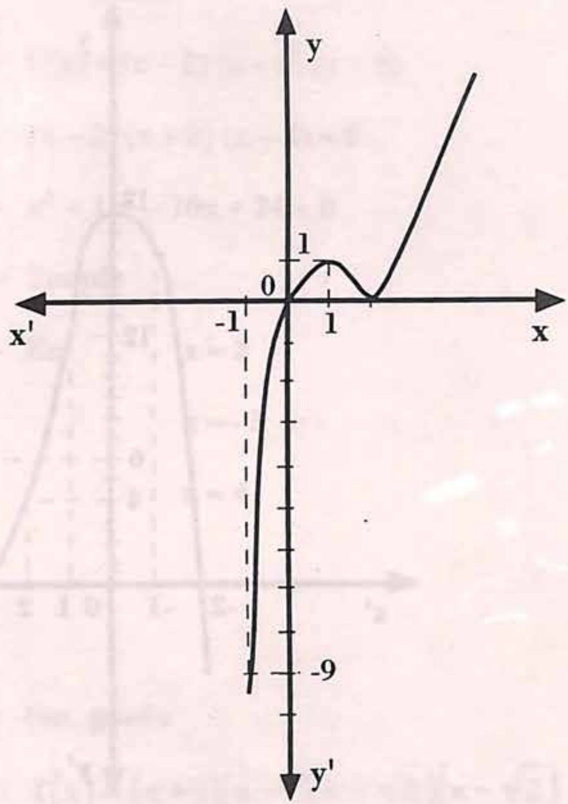
3.- $y = 3x^3 + 5x^2 - 4x - 3$



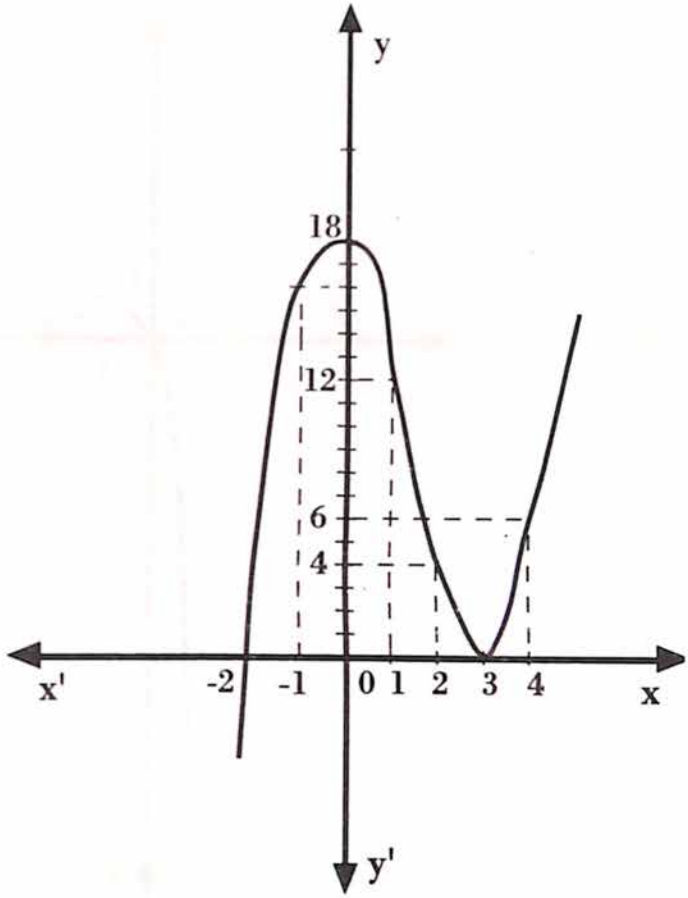
4.- $y = x^3 - 4x$



5.- $y = x^3 - 4x^2 + 4x$



6.- $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$



II.-

1.- 3er. grado

2.- $f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)$

3.- $(x-2)(x+3)(x-4) = 0$

4.- $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

5.- Simple

6.- En $x = 2$

$x = -3$ y

$x = 4$

III.-

1.- 6to. grado

2.- $f(x) = (x+i)(x-i)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$
$(x+1)(x-2)$

3.- $(x+i)(x-i)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$
$(x+1)(x-2) = 0$

4.- $x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 + 2x + 4 = 0$

5.- Multiplicidad simple.

6.- $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, -1 , 2

IV.-

1.- 4to. grado

2.- $\left[x-(1-i)\right]\left[x-(1+i)\right]\left[x-\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$
$\left[x-\left(1-\sqrt{2}\right)\right]$

3.- $\left[x-(1-i)\right]\left[x-(1+i)\right]\left[x-\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$
$\left[x-\left(1-\sqrt{2}\right)\right]=0$

4.- $x^4-4x^3+5x^2-2=0$

V.-

1.- 5to. grado

2.- $f(x)=x(x+2)(x-3)(x-1)(x+1)$

3.- $x(x+2)(x-3)(x-1)(x+1)=0$

4.- $x^5-x^4-7x^3+x^2+6x=0$

5.- Simple

6.-

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	518	48	0	0	0	1	–12	0

7.- Lo corta en 0 , –1 , 1, –2 y 3

VI.-

1.- 3er. grado

2.- $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$

3.- Simple

4.- La gráfica corta al eje x en 3, –1 y 2

5.- $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

VII.-

1.- 6to. grado

2.- $x = 2$, $x = -3$, $x = -1$

3.- $x = 2$ multiplicidad doble
$x = -3$ multiplicidad simple
$x = -1$ multiplicidad triple

4.- En 2 es tangente y nolo corta, en –3 lo corta y no es tangente, en –1 es tangente y lo corta.

5.- $f(-2) = 72$; $f(2) = -74$

6.- $x^6 - 4x^5 - 3x^4 - 12x^3 + 11x^2 + 28x + 12 = 0$

VIII.-

1.- 3er. grado

2.- $x = -3$, $x = 1$, $x = 4$

3.- $(x + 3)(x - 1)(x - 4) = 0$

4.- $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 4)$

5.- Simple

6.- $f(-4) = -40$, $f(-3) = 0$, $f(-2) = 18$

$f(4) = 0$, $f(3) = -12$, $f(2) = -10$, $f(1) = 0$

7.- $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

IX.-

1.- $(x + 2)^3 (x - 1)^2 (x - 2) = 0$

2.- 6to. grado

3.- 6 raíces

4.- 1) En –2 es tangente y lo corta

2) En 1 es tangente y no lo corta

3) En 2 lo corta y no es tangente

5.- $x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 8 = 0$

X.-

1.- –2 , 1 , 3 , 2

2.- 4to. grado

3.- $(x + 2)\ (x - 1)\ (x - 3)\ (x - 2) = 0$

4.- $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$

Ejercicio No. 3

I.-

a.- $2 - i \ , -5 \ , 1$

b.- $2 + 2\sqrt{2}, \ 3, \ -1$

II.-

1.- a.- 3er. grado

b.- $f(x) = (x-2)\ (x+3)\ (x-4)$

c.- $(x-2)\ (x+3)\ (x-4) = 0$

d.- $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

e.- $m = 1$

2.- a.- 6to. grado

b.- $f(x) = (x+i)(x-i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$
$(x+1)(x+2)$

c.- $(x+i)(x-i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$
$(x+1)(x+2) = 0$

d.- $x^6 - x^5 - 5x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 4 = 0$

3.- a.- 4to. grado

b.- $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2$

4.- a.- 5to. grado

b.- m = 1

c.- Corta al eje x en –2 , 3 , 1 , –1 , 0

d.- $x^5 - x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x = 0$

III.-

1.- a.- 3er. grado

b.- x = 3 , x = –1 , x = 2

c.- m = 1

d.- $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

2.- a.- 4to. grado

b.- x = 1/2 , x = –2/3 , x = 4 , x = –1

c.- m = 1

d.- $6x^4 - 17x^3 - 29x^2 + 2x + 8 = 0$

IV.-

1.- a.- $(x+2)^3\ (x-1)^2\ (x-2)=0$

b.- 6to. grado

c.- 6 raíces

d.- La gráfica corta al eje x en -2, es tangente y lo corta en 1, es tangente y no lo corta, en 2, lo corta y no es tangente.

V.-

a.- 5to. grado

b.- $x=2$, $m=2$; $x=-3$; $x=-1$, $m=3$

c.- $x=2$, $m=2$, $x=-3$, $m=1$, $x=-1$, $m=3$

d.- Corta al eje x en 2 es tangente y no lo corta, en -3, lo corta y no es tangente, en -1 es tangente y lo corta.

VI.-

1.- a.- 3er. grado

b.- $x=-3$, $x=1$, $x=3$

c.- $(x + 3)\ (x - 1)\ (x - 3) = 0$

d.- $m = 1$

e.- $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

VII.-

a.- $f(x) = x^4 - 9x^2 + 7x + 4$

$f(0) = 4$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & +0 & -9 & +7 & +4 & 1 \\ & +1 & +1 & -8 & -1 & \\ \hline 1 & +1 & -8 & -1 & +3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & +0 & -9 & +7 & +4 & 2 \\ & +2 & +4 & -10 & -6 & \\ \hline 1 & +2 & -5 & -3 & -2 & \end{array}$$

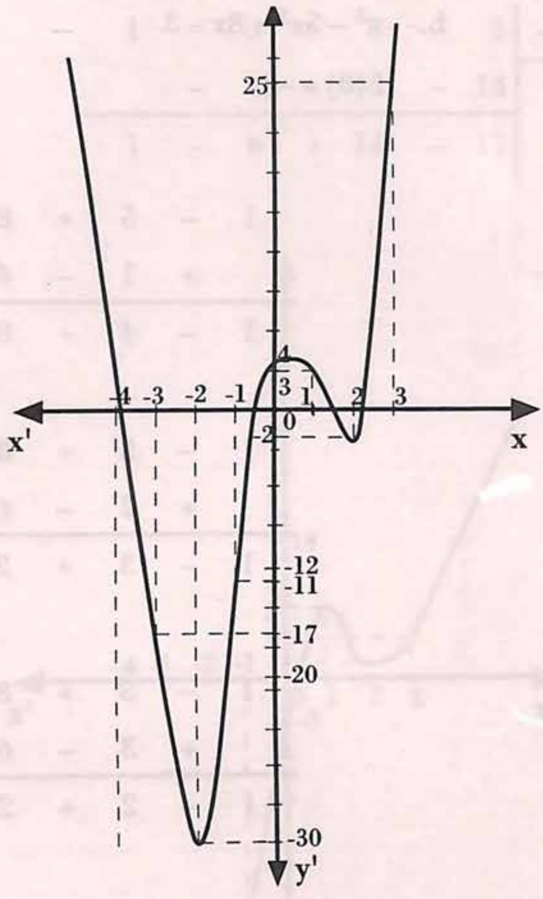
$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & +0 & -9 & +7 & +4 & 3 \\ & +3 & +9 & +0 & +21 & \\ \hline 1 & +3 & +0 & +7 & +25 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r} 1 & + & 0 & - & 9 & + & 7 & + & 4 & -1 \\ & - & 1 & + & 1 & + & 8 & - & 15 & \\ \hline 1 & - & 1 & - & 8 & + & 15 & - & 11 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r} 1 & + & 0 & - & 9 & + & 7 & + & 4 & -2 \\ & - & 2 & + & 4 & + & 10 & - & 34 & \\ \hline 1 & - & 2 & - & 5 & + & 17 & - & 30 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r} 1 & + & 0 & - & 9 & + & 7 & + & 4 & -3 \\ & - & 3 & + & 9 & + & 0 & - & 21 & \\ \hline 1 & - & 3 & + & 0 & + & 7 & - & 17 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|r} 1 & + & 0 & - & 9 & + & 7 & + & 4 & -4 \\ & - & 4 & + & 16 & - & 28 & + & 84 & \\ \hline 1 & - & 4 & + & 7 & - & 21 & + & 88 & \end{array}$$



25
4
3
-4
-3
-2
-1
1
2
3
0
-2
x'
x
-12
-11
-17
-20
-30
y'

b.- $x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

$f(0) = -3$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & - & 5 & + & 8 & - & 3 & 1 \\ & + & 1 & - & 4 & + & 8 & \\ \hline 1 & - & 4 & + & 8 & + & 5 & \end{array}$$

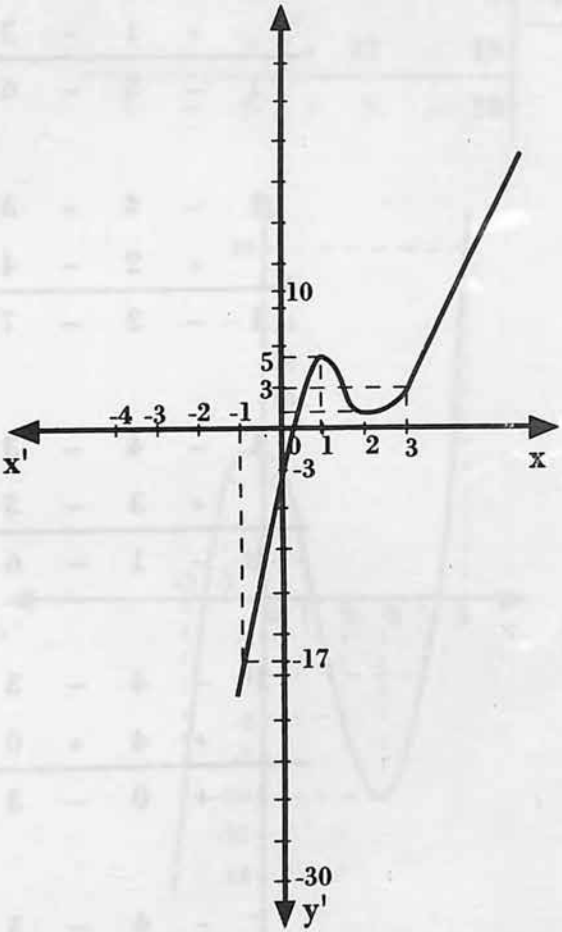
$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & - & 5 & + & 8 & - & 3 & 2 \\ & + & 2 & - & 6 & + & 4 & \\ \hline 1 & - & 3 & + & 2 & + & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & - & 5 & + & 8 & - & 3 & 3 \\ & + & 3 & - & 6 & + & 6 & \\ \hline 1 & - & 2 & + & 2 & + & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & - & 5 & + & 8 & - & 3 & 4 \\ & + & 4 & - & 4 & + & 16 & \\ \hline 1 & - & 1 & + & 4 & + & 13 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & - & 5 & + & 8 & - & 3 & 5 \\ & + & 5 & - & 0 & + & 40 & \\ \hline 1 & + & 0 & + & 8 & + & 37 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
1 & - & 5 & + & 8 & - & 3 & -1 \\
 & - & 1 & + & 6 & - & 14 & \\
\hline
1 & - & 6 & + & 14 & - & 17 &
\end{array}$$



c.- $x^3 - 4x^2 - 3x + 8$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 1 & - & 4 & - & 3 & + & 8 & 1 \\ \cline{8-8} & + & 1 & - & 3 & - & 6 & \\ \hline 1 & - & 3 & - & 6 & + & 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 1 & - & 4 & - & 3 & + & 8 & 2 \\ \cline{8-8} & + & 2 & - & 4 & - & 14 & \\ \hline 1 & - & 2 & - & 7 & - & 6 & \end{array}$$

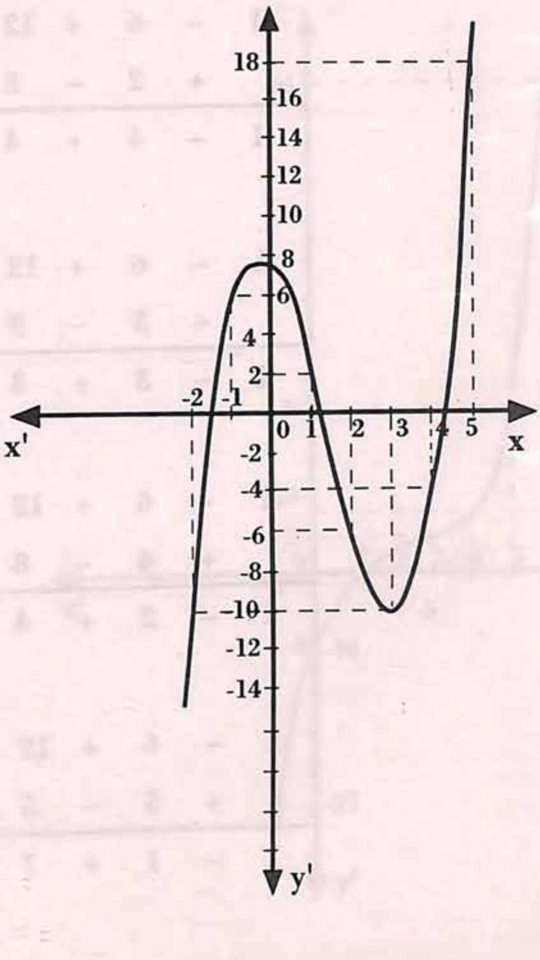
$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 1 & - & 4 & - & 3 & + & 8 & 3 \\ \cline{8-8} & + & 3 & - & 3 & - & 18 & \\ \hline 1 & - & 1 & - & 6 & - & 10 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 1 & - & 4 & - & 3 & + & 8 & 4 \\ \cline{8-8} & + & 4 & + & 0 & - & 12 & \\ \hline 1 & + & 0 & - & 3 & + & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 1 & - & 4 & - & 3 & + & 8 & 5 \\ \cline{8-8} & + & 5 & + & 5 & + & 10 & \\ \hline 1 & + & 1 & + & 2 & + & 18 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -4 & -3 & +8 & -1 \\ & -1 & +5 & -2 & \\ \hline 1 & -5 & +2 & +6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -4 & -3 & +8 & -2 \\ & -2 & +12 & -18 & \\ \hline 1 & -6 & +9 & -10 & \end{array}$$



d.- $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$f(0) = -8$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & +12 & -8 & 1 \\ & +1 & -5 & +7 & \\ \hline 1 & -5 & +7 & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & +12 & -8 & 2 \\ & +2 & -8 & +8 & \\ \hline 1 & -4 & +4 & 0 & \end{array}$$

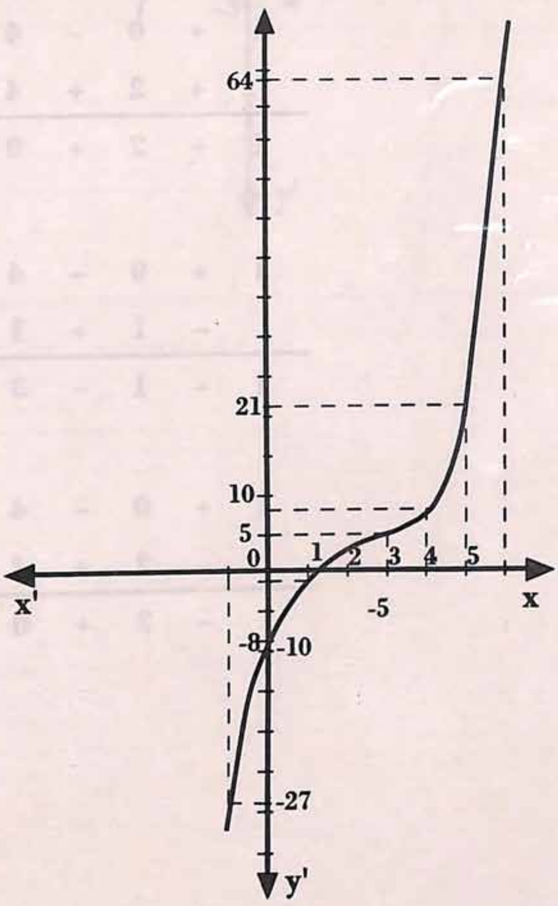
$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & +12 & -8 & 3 \\ & +3 & -9 & +9 & \\ \hline 1 & -3 & +3 & +1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & +12 & -8 & 4 \\ & +4 & -8 & +16 & \\ \hline 1 & -2 & +4 & +8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & +12 & -8 & 5 \\ & +5 & -5 & +35 & \\ \hline 1 & -1 & +7 & +27 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
1 & - & 6 & + & 12 & - & 8 & 6 \\
 & + & 6 & + & 0 & + & 72 & \\
\hline
1 & + & 0 & + & 12 & + & 64 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
1 & - & 6 & + & 12 & - & 8 & -1 \\
 & - & 1 & + & 7 & - & 19 & \\
\hline
1 & - & 7 & + & 19 & - & 27 &
\end{array}
$$



e.- $x^3 - 4x$

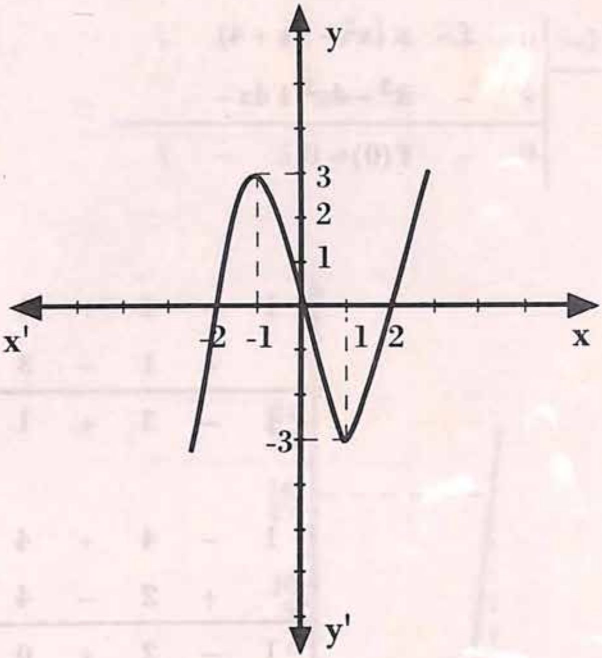
$f(0) = 0$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
1 & + & 0 & - & 4 & + & 0 & 1 \\ \cline{8-8}
 & + & 1 & + & 1 & - & 3 & \\ \hline
1 & + & 1 & - & 3 & - & 3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
1 & + & 0 & - & 4 & + & 0 & 2 \\ \cline{8-8}
 & + & 2 & + & 4 & + & 0 & \\ \hline
1 & + & 2 & + & 0 & + & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
1 & + & 0 & - & 4 & + & 0 & -1 \\ \cline{8-8}
 & - & 1 & + & 1 & + & 3 & \\ \hline
1 & - & 1 & - & 3 & + & 3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
1 & + & 0 & - & 4 & + & 0 & -2 \\ \cline{8-8}
 & - & 2 & + & 4 & & & \\ \hline
1 & - & 2 & + & 0 & + & 0 &
\end{array}$$


y
3
2
1
x'
-2
-1
1
2
x
-3
y'

f.- $x(x^2 - 9x + 4)$

$x^3 - 4x^2 + 4x$

$f(0) = 0$

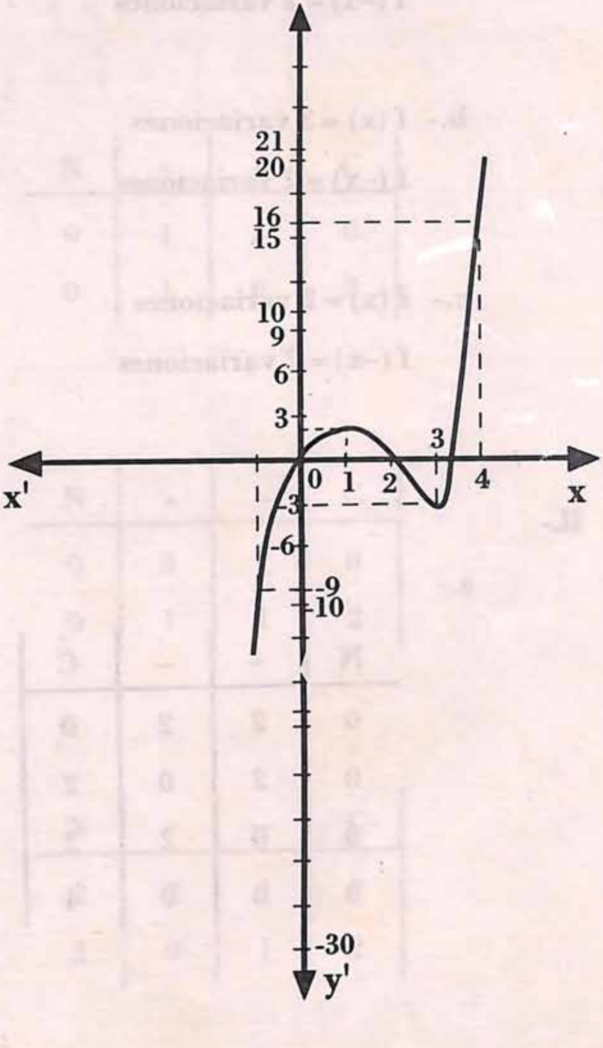
$$\begin{array}{rrrrrrrr|r} 1 & - & 4 & + & 4 & + & 0 & & 1 \\ & + & 1 & - & 3 & + & 1 & & \\ \hline 1 & - & 3 & + & 1 & + & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r} 1 & - & 4 & + & 4 & + & 0 & & 2 \\ & + & 2 & - & 4 & + & 0 & & \\ \hline 1 & - & 2 & + & 0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r} 1 & - & 4 & + & 4 & + & 0 & & 3 \\ & + & 3 & - & 3 & - & 3 & & \\ \hline 1 & - & 1 & + & 1 & - & 3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r} 1 & - & 4 & + & 4 & + & 0 & & 4 \\ & + & 4 & + & 0 & + & 16 & & \\ \hline 1 & + & 0 & + & 4 & + & 16 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l} 1 & - & 4 & + & 4 & + & 0 & -1 \\ & - & 1 & + & 5 & - & 9 & \\ \hline 1 & - & 5 & + & 9 & - & 9 & \end{array}$$



Ejercicio No. 4

I.-

a.- f (x) = 2 variaciones

f (–x) = 2 variaciones

b.- f (x) = 3 variaciones

f (–x) = 2 variaciones

c.- f (x) = 2 variaciones

f (–x) = 2 variaciones

II.-

a.-

N	+	–	C
0	2	2	0
0	2	0	2
0	0	2	2
0	0	0	4

b.-

N	+	−	C
0	3	0	0
0	1	0	2

c.-

N	+	−	C
0	1	2	0
0	1	0	2

d.-

N	+	−	C
0	3	1	0
0	1	1	2

e.-

N	+	−	C
2	2	1	0
2	0	1	2

f.-

N	+	–	C
0	2	3	0
0	2	1	2
0	0	3	2
0	0	1	4

III.-

a.- ±1 , ±1/2 , ±3 , ±3/2

b.- ±2 , ±3 , ±4 , ±5 , ±15 , ±30 , ±40 , ±60 , ±120

c.- ±1

d.- ±1 , ±2 , ±3 , ±6 , ±1/2 , ±3/2 , ±1/6 , ±1/3 , 1/2

e.- ±1 , ±2 , ±4 , ±8

f.- ±1 , ±2 , ±4 , ±8

IV.-

1.- $x_1 = -1$, $x_2 = -4$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

2.- $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$, $x_4 = -4$

3.- $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -6$, $x_4 = 0$

4.- $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$

5.- $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1/3$, $x^5 = -1/3$

6.- $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$

7.- $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$

$x_4 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$

8.- $x_1 = -1$, $m = 4$

9.- $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1 + 2i$

$x_5 = 1 - 2i$

10.- $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 3$, $x_5 = 1$,

$x_6 = 1$

Ejercicio No. 5

I.-

1.- $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

2.- $36x^4 - 108x^3 - 54x^2 + 108x - 81 = 0$

3.- $x^4 - 208x^2 - 9216 = 0$

4.- $x^4 - 125x^2 + 2500 = 0$

II.-

1.- $x^4 + 12x^3 + 44x^2 + 48x = 0$

2.- $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 10x = 0$

3.- $9x^4 - 117x^3 + 386x^2 - 118x - 640 = 0$

4.- $x^5 + 11x^4 + 53x^3 + 101x^2 + 78x = 0$

Ejercicio No. 6

I.-

a.- $x^3 - 13x - 12 = 0$

b.- $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

c.- $x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = 0$

d.- $x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 40x + 14 = 0$

e.- $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 32x + 21 = 0$

II.-

a.- $x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 2$

b.- $x_1 = 5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 8$

c.- $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$

d.- $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$

e.- $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$

f.- $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$; $k = -1$

g.- $k = 13$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$

h.- $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$

i.- $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = -4$, $x_4 = -4$

j.- $x_1 = 1/3$, $x_2 = -1/3$, $x_3 = -2$, $x_4 = -3$

Ejercicio No. 7

I.-

a.- $\log_2 8 = 3$

b.- $\log_{\frac{3}{4}} \frac{27}{64} = 3$

c.- $\log_x 16 = 4$

d.- $\log_5 \left(\frac{1}{125} \right) = -3$

e.- $\log_4 \left(\frac{1}{64} \right) = -3$

f.- $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8} \right) = 3$

g.- $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

h.- $\log_a c = b$

i.- $\log_x \left(\frac{1}{x^4} \right) = -4$

j.- $\log_p N = m$

II.-

a.- $6^3 = 216$

b.- $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

c.- $a^c = b$

d.- $b^m = x$

e.- $5^3 = 125$

f.- $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

g.- $m^p = n$

h.- $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

i.- $2^6 = 64$

j.- $c^d = b$

III.-

a.- 5

b.- 2

c.- 1/25

d.- 27

e.- 4

IV.-

a.- $\log V = [\log 4 + \log \pi + 3 \log r] - \log 3$

b.- $[3 \log (x + 5) + 2 \log (x - 5)] - [4 \log (x + 1) + 5 \log (x - 1)]$

c.- $$\frac{\left[\log 3 + 4\log\left(a+b\right) + 5\log\left(c+d\right)\right]}{8} - \frac{\left[\log 5 + 7\log\left(a-b\right) + 6\log\left(c-d\right)\right]}{8}$$

d.- $$\frac{\left[\log c + 4\log\left(c+d\right) + 5\log\left(c-d\right)\right]}{10} - \frac{\left[\log 2 + 9\log\left(x+y\right) + 8\log\left(x-y\right)\right]}{10}$$

V.-

a.- $\log \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{y^5}}$

b.- $\log \dfrac{(x+y)^2}{(x-y)^4}$

c.- $\log \sqrt[6]{\dfrac{c^3b^2}{a^4d^3}}$

d.- $\log \dfrac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt{4^3}}$

VI.-

a.- –3 , 1

b.- 1

c.- 14/9

d.- 3

e.- 5

f.- 9

g.- Ø

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 8

RESPUESTAS

Ejercicios Unidad No. 8

Ejercicio No. 1

I.-

1.- $\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{2}{x-1}$

2.- $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{1}{x-5}$

3.- $\dfrac{3}{2x+1}+\dfrac{2}{2x-1}$

4.- $\dfrac{2}{3x-1}+\dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{1}{x-1}$

5.- $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{x+1}$

6.- $\frac{5}{x}+\frac{4}{x-2}-\frac{2}{x+1}$

7.- $\frac{2}{3x-1}+\frac{2}{2x-3}-\frac{3}{2x+1}$

8.- $6-\frac{7}{x+2}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x-1}$

9.- $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-2}$

10.- $x+2+\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2}$

Ejercicio No. 2

I.-

1.- $\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}$

2.- $\frac{2}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}$

3.- $\frac{4}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^3}$

4.- $\frac{1}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}-\frac{3}{(x-2)^3}$

5.- $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x+3}+\frac{2}{(x+3)^2}$

6.- $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}$

7.- $x-1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{(x+1)^2}$

8.- $\frac{4}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$

9.- $\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}$

10.- $\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}$

Ejercicio No. 3

I.-

1.- $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2+1}$

2.- $\dfrac{2x+1}{x^2-6}+\dfrac{3x-1}{x^2+5}$

3.- $\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3x+1}{x^2+9}$

4.- $\dfrac{x}{x^2+4}+\dfrac{x}{x^2+1}$

5.- $\dfrac{2}{\left(x-1\right)^2}+\dfrac{2x-3}{x^2+5}$

6.- $\dfrac{2x+2}{2x^2+3}+\dfrac{3x-1}{3x^2+1}$

7.- $2x-3+\dfrac{3x-1}{x^2+x-1}-\dfrac{2x+2}{x^2-x+1}$

8.- $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{x^2+x+1}+\dfrac{3x-1}{x^2-x-1}$

9.- $\frac{2}{x}+\frac{3x-4}{x^2+2x-4}$

10.- $\frac{x-1}{x^2+2}-\frac{x-3}{x^2+3}$

Ejercicio No. 4

I.-

1.- $\frac{2}{x-1}+\frac{2x+3}{\left(x^2+1\right)^2}$

2.- $\frac{3}{x+2}-\frac{4}{\left(x^2+2\right)^2}$

3.- $\frac{1}{x^2}-\frac{2x-1}{x^2+5}$

4.- $\frac{1}{x^3}-\frac{x-1}{\left(x^2+2\right)^2}$

5.- $\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{x-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

6.- $x^2-2+\frac{x}{x^2+1}-\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$

7.- $\frac{x-2}{x^2+3}+\frac{x-3}{\left(x^2+3\right)^2}$

8.- $\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}-\frac{3x-4}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

9.- $\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{2}{(x-3)^2}+\dfrac{2}{x^2+x+1}+$

$\dfrac{x+2}{(x^2+x+1)^2}$

10.- $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{x^2-x+1}+$

$\dfrac{2x}{(x^2+x+1)^2}$

EJEMPLOS EXAMENES

Primer Parcial, Segundo Parcial y Examen Final

EJEMPLOS EXAMENES

Primer Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA

Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

PRIMER EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre________________________ Matrícula________
Profesor ________________________
Fecha________________________ Sec.________

I.-

a.- Si px: $x^2 - 6x + 8 = 0$ y qx: $x^2 - 16$. Formar la conjunción y hallar el conjunto de verdad.

b.- Resolver: $x^2 - 5x - 6 \leq 0$.

II.-

a.- Hallar la gráfica del conjunto solución de:

$Y > x^2 + 4x + 3$

b.- Completa:

1.- (P U Q)' =

2.- (C') =

3.- B' U B

4.- A I Ø

5.- D U D'

III.-

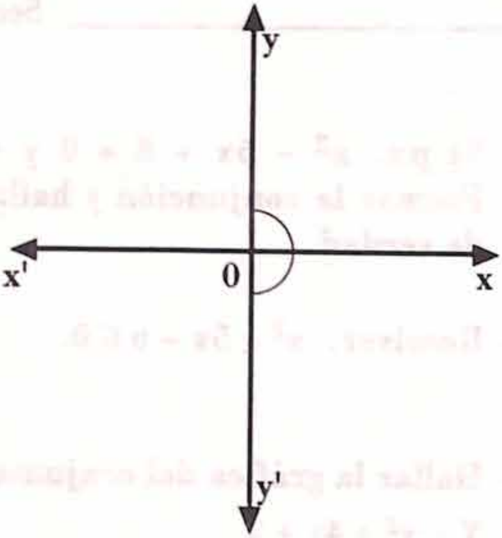
a.- Resolver: $|x + 6| \geq 8$

b.- Hallar D y DI de $-3xy + 2y = -6x + 4$

IV.-

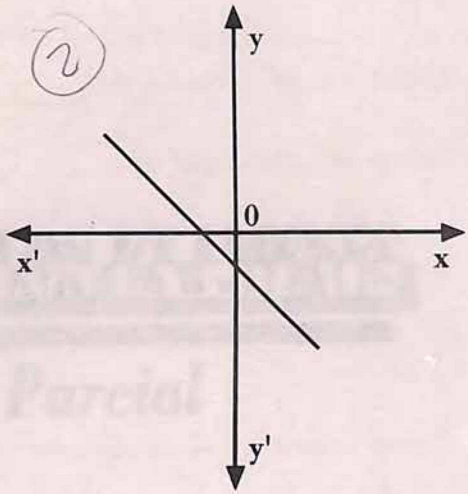
a.- Cuáles de las siguientes gráficas representa una función:

1.-



2.-

2



b.- Hacer el análisis lógico de:

$(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow [\sim q \vee \sim r]$

V.-

a.- Hallar la distancia sobre el eje real de:

1.- 6 y 5

2.- 0 y -4

b.- Si $A = \{x / x \geq -2\}$; $B = [-1, 8)$. Hallar:

1.- $A \cup B$

2.- $A \cap B$

EJEMPLOS EXAMENES

Primer Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA

Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

PRIMER EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre________________________ **Matrícula**_______

Profesor ________________________

Fecha________________________ **Sec.**__________

I.-

a.- Halla la distancia sobre el eje real de:

1.- -6 **y** 4

2.- 4 **y** -5

b.- Resolver y hacer la gráfica del conjunto solución de:

$|2x + 4| < 8$

II.-

a.- Resolver: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

b.- Enuncia la ley aplicada

1.- $p \vee q \equiv q \vee p$

2.- $(p \vee q)' \equiv \sim p \wedge \sim q$

III.-

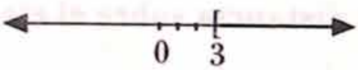
a.- **Hacer la gráfica del conjunto solución de:**

$$\begin{cases} -x \geq -y \\ y \leq 3 \end{cases}$$

b.- Hallar Df y DI de:

$$4y = \frac{3x-1}{2x+2}$$

IV.-

a.- **Si A =** 

B=[–2, ∞]

Hallar

1.- **A U B**

2.- **A ⋂ B**

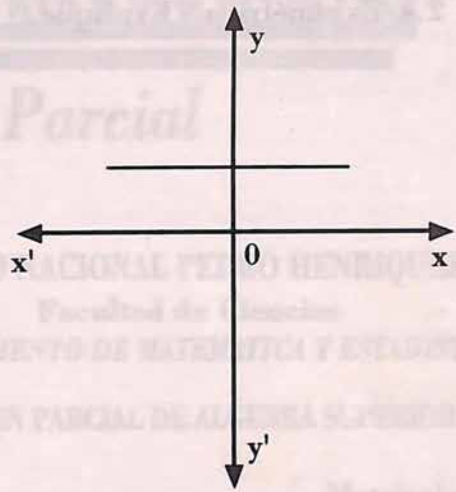
b.- Hacer el análisis lógico de:

$(p \vee \sim q) \leftrightarrow [\sim p \vee (q \wedge r)]$

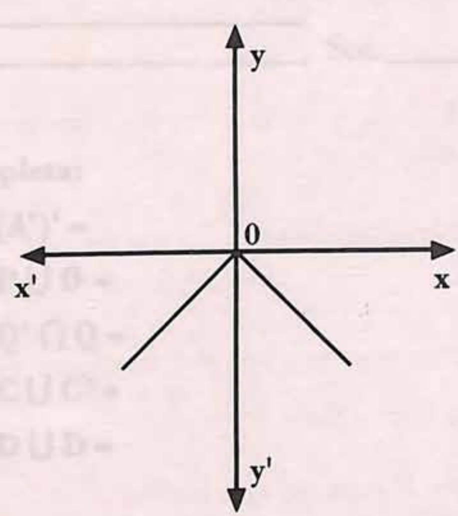
V.-

a.- Cuáles de los siguientes gráficos representa una función, explique.

1.-



2.-



b.- Sea R una relación en $A = \{3, 5, 7, 9\}$; definida por

$R = \{(3, 3), (5, 5), (5, 7), (7, 7), (9, 9)\}$

1.- Es reflexiva

2.- Es simétrica. Explique.

EJEMPLOS EXAMENES

Primer Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA

Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

PRIMER EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre____________________________ **Matrícula**________
Profesor ___________________________
Fecha______________________________ **Sec.**____________

I.-

a.- Completa:

1.- $(A')' =$

2.- $P \cup \emptyset =$

3.- $Q' \cap Q =$

4.- $C \cup C' =$

5.- $D \cup D =$

b.- Si Px: $x^2 - 5x = 0$; qx: $x^2 - 25 = 0$. Formar la disyunción y hallar el conjunto solución.

II.-

a.- Hallar Df y DI de $-3x + 2xy = -6y + 3$.

b.- Resolver y hacer la gráfica del conjunto solución

$|3x - 6| \geq 12$

III.-

a.- Hacer el análisis lógico de:

$\sim [\sim (\sim p \wedge \sim q)] \rightarrow [q \vee (\sim r)]$

b.- Si $A = \{x/x \leq -2\}$; $B = \{x/-6 < x \leq 8\}$

Hallar:

1.- $B - A$

2.- $A - B$

IV.-

a.- Si $(x, y + 3) = (5, 2)$. Hallar los valores de x e y.

b.- Significado geométrico de $|3x - 2| \leq 8$

V.-

a.- Hacer la gráfica del conjunto solución de:

$y \leq x^2 - 4x - 5$

b.- Si $P = \{x, y, z\}$. Hallar 2^P.

EJEMPLOS EXAMENES

Primer Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA
Facultad de Ciencias
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

PRIMER EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre____________________________ Matrícula_______
Profesor ___________________________
Fecha______________________________ Sec.____________

I.-

a.- Resolver: $|2x - 4| \leq 8$

b.- Enuncie la ley aplicada

1.- $A \cap B = B \cap A$

2.- $(M \cup N)' = M' \cap N'$

II.-

a.- Gráfica del conjunto solución de

$3x - 4y + 5 \leq 0$

b.- Hallar D y DI de: $4y - 3x = 5xy - 1$

III.-

a.- Resolver: $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

b.- Hacer el análisis lógico de:

$[p \rightarrow \sim q] \leftrightarrow [q \wedge \sim r]$

IV.-

a.- Si px: $x^2 - x = 0$; qx: $x^2 - 1 = 0$, formar la disyunción y hallar el conjunto de verdad.

b.- Si A = 

$B = \{x/x \geq -2\}$

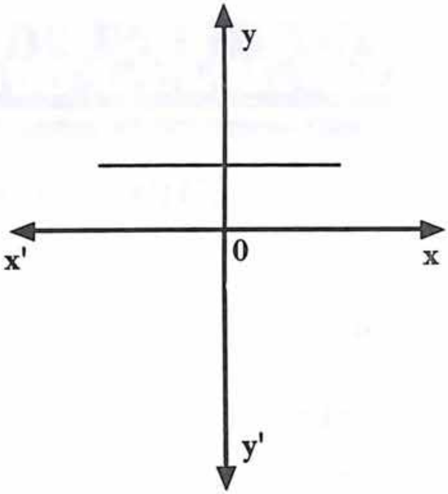
1.- $A - B$

2.- $A \cap B$

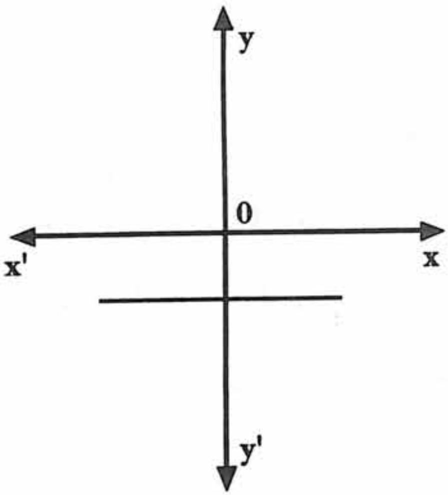
V.-

a.- Cuáles de las siguientes gráficas representan una función constante.

1.-



2.-



EJEMPLOS EXAMENES

Segundo Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA

Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre______________________________ Matrícula________

Profesor ______________________________

Fecha________________________________ Sec.____________

1.- Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 3, 5, 6, 7, 8 que sean menores que 700 sin repetición.

2.- Calcular n en $C_{(n,\,3)} = C_{(n,\,5)}$

3.- Calcular el 4to. término en el desarrollo del binomio $(2 - 3i)^6$

4.- Interpolar tres medios geométricos entre 1/8 y 2.

5.- Determina la fracción común o quebrado equivalente a $2.2\dot{7}\dot{7}....$

6.- Aplicando el teorema de Moivre calcular

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)^6$$ expresa el resultado en forma rectangular.

7.- Hallar los valores de x e y que satisfacen la siguiente igualdad

$-3xy + 2yi = 9 - 8i.$

8.- Efectúa: $\dfrac{3+2i}{1-2i}$

9.- La media aritmética de dos numeros es 41/2 y la media geométrica es 20. Hallar los números.

10.- Resuelve y expresa el resultado en forma rectangular

$$\frac{3\left(\cos 75^\circ + i\,\text{sen}\,75^\circ\right)}{2\left(\cos 15^\circ + i\,\text{sen}\,15^\circ\right)}$$

EJEMPLOS EXAMENES

Segundo Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA

Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre____________________________ **Matrícula**________

Profesor __________________________

Fecha______________________________ **Sec.**___________

Tema I

a.- Efectúa:

$$[4\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)]^3$$

b.- Expresar en forma rectangular

$$2\,(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$$

Tema II

a.- Hallar el término que continúa x^{10} en el desarrollo de $(2x^2 + 3y^4)^6$. Sin efectuar el desarrollo.

b.- Hallar la suma de:

1, 1/3, 1/9,....

Tema III

a.- Interpolar 6 medios aritméticos entre –4 y 10.

b.- En cuantas maneras se pueden sentar en una fila 3 niños y 2 niñas, si las niñas siempre deben estar juntas.

Tema IV

a.- Simplifica:

$$\frac{(n-3)!}{(n-1)!}$$

b.- La media aritmética de dos números es 5 y su media armónica 24/5. Hallar los números.

Tema V

a.- Pruebe que:

$$\text{Sen } x = \frac{1}{\csc x}$$

b.- Cuántas selecciones posibles tiene un alumno para elegir 5 temas de un temario de 8 temas.

EJEMPLOS EXAMENES

Segundo Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA
Facultad de Ciencias
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre____________________________ Matrícula_______
Profesor ___________________________
Fecha_____________________________ Sec.____________

Tema I

a.- La media aritmética de dos números es 13/2 y su media geométrica es 6. Hallar los números.

b.- De cuántas maneras se pueden sentar en una fila 4 niños y 3 niñas, si las niñas se sientan juntas.

Tema II

a.- Demostrar que:

$$\text{ctg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

b.- Hallar solamente el 6to. término del desarrollo de $(2x^3 - 3y^2)^{10}$

Tema III

a.- Hallar

1.- $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

2.- $\dfrac{(n-1)!}{n!}$

b.- Tres números están en progresión aritmética y su suma es 18 y el producto del 1er. y el 3ero. es 20. Hallar los números.

Tema IV

a.- Hallar los valores de x, si:

$-6x + 2yi = -5 + 3i$

b.- Hallar n, si $4C(n, 2) = 3C(n, 3)$

Tema V

a.- Interpolar 5 medios aritméticos entre –4 y 8.

b) Expresar en forma rectangular

$$2\,(\cos 210° + \operatorname{sen} 210°)$$

EJEMPLOS EXAMENES

Segundo Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA
Facultad de Ciencias
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre________________________ **Matrícula**______
Profesor ________________________
Fecha________________________ **Sec.**__________

Tema I

a.- Demostrar que:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \theta = \csc^2 \theta$$

b.- El 3er. término de una progresión aritmética es 6 y el 6to. término es 12. Hallar el 9no. término.

Tema II

a.- Interpolar 4 medios geométricos entre 2 y 16.

b.- De cuántas maneras se pueden sentar 3 Dominicanos, 2 Bolivianos, 3 Venezolanos y 2 Chilenos, si los de un mismo país deben estar juntos.

Tema III

a.- Efectúa $\dfrac{4+2i}{1-i}$

b.- Una caja contiene 6 bolas blancas y 5 rojas. De cuántas maneras se pueden sacar 4 bolas que sean del mismo color.

Tema IV

a.- Expresar en forma trigonométrica $-1-i$.

b.- Cuántos comités de 6 personas se pueden formar con 9 personas. Si hay una persona que está en todos los comités.

Tema V

a) La media aritmética de 2 números es 10 y su media geométrica es 8. Hallar los números.

b.- Hallar x e y si: $-2x-3yi=-5+4i$

EJEMPLOS EXAMENES

Segundo Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA
Facultad de Ciencias
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre____________________________ Matrícula_______
Profesor __________________________
Fecha_____________________________ Sec.____________

Tema I

a.- Hallar los valores de x e y si:

$$-6x - 5yi = -18 + 10i$$

b.- Cuántos números diferentes de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 3, 5, 6, 9. Que sean pares y no se permite la repetición.

Tema II

a.- Hallar n, si $3P(n, 2) = P(n, 3)$

b.- Efectúa: $\dfrac{6\left(\cos\ 30° + i \text{ sen } 30°\right)}{3\left(\cos\ 10° + i \text{ sen } 10°\right)}$

Tema III

a.- Interpolar 5 medios aritméticos entre –3 y 17.

b.- La media armónica de dos números es 3/2 y uno de ellos es 6. Hallar el otro.

Tema IV

a.- Efectúa

$[3\ (\cos 25° + i \text{ sen } 25°)]^4$

b.- Un alumno tiene que contestar 6 preguntas de un temario de 10 preguntas. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

Tema V

a.- Hallar la media geómetrica de p^2 y q^2.

b.- Demuestre que:

$$\text{tag } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

EJEMPLOS EXAMENES

Segundo Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA
Facultad de Ciencias
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre____________________________ Matrícula_______
Profesor ___________________________
Fecha_____________________________ Sec.____________

Tema I

a.- Demostrar que:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \theta = \csc^2 \theta$$

b.- El 3er. término de una progresión aritmética es 6 y el 6to. término es 12. Hallar el 9no. término.

Tema II

a.- Interpolar 4 medios geométricos entre 2 y 16.

b.- De cuántas maneras se pueden sentar 3 Dominicanos, 2 Bolivianos, 3 Venezolanos y 2 Chilenos, si los de un mismo país deben estar juntos.

Tema III

a.- Efectúa $\frac{4+2i}{1-i}$

b.- Una caja contiene 6 bolas blancas y 5 rojas. De cuántas maneras se pueden sacar 4 bolas que sean del mismo color.

Tema IV

a.- Expresar en forma trigonométrica $-1-i$.

b.- Cuántas comités de 6 personas se pueden formar con 9 personas. Si hay una persona que está en todos los comités.

Tema V

a.- La media aritmética de 2 números es 10 y su media geométrica es 8. Hallar los números.

b.- Hallar x e y si: $-2x - 3yi = -5 + 4i$

EJEMPLOS EXAMENES

Segundo Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA
Facultad de Ciencias
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre____________________________ Matrícula_______
Profesor ____________________________
Fecha____________________________ Sec.____________

Tema I

a.- Interpola 5 medios aritméticos entre -3 y 9.

b.- Hallar la suma de los 8 primeros términos de la progresión geométrica. 2, 4, 8,....

Tema II

a.- La media aritmética de dos números en 5 y su media geométrica es 6. Hallar los números .

b.- Hallar el 6to. término del desarrollo de $(2x^2 + 3y^2)^9$.

Tema III

a.- Cuantos números diferentes de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 3, 5, 8, 9: no se permite repetición.

b.- De cuántas maneras se pueden colocar en un estante 3 libros de física, 2 de química y 4 de biología. Si los de un mismo tema deben estar juntos.

Tema IV

a.- Efectuar: $\dfrac{2+2i}{3-i}$

b.- Hallar los valores reales de x e y que satisfacen la siguiente igualdad:

$-3x + 2yi = -9 - 10i$

Tema V

a.- Pruebe que:

$$1+tag^2\,\theta = sec^2\,\theta$$

b.- Exprese en forma triginométrica $1-i$.

EJEMPLOS EXAMENES

Segundo Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA

Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre__________________________ **Matrícula**_______
Profesor __________________________
Fecha___________________________ **Sec.**____________

Tema I

a.- La media aritmética de dos números es 13/2 y su media geométrica es 6. Hallar los números.

b.- De cuántas maneras se pueden sentar en una fila 4 niños y 3 niñas, si las niñas se sientan juntas.

Tema II

a.- Demostrar que: $\text{ctg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

b.- Hallar solamente el 6to. término del desarrollo de $(2x^3 - 3y^2)^{10}$

Tema III

a.- Hallar:

1.- $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

2.- $\dfrac{(n-1)!}{n!}$

b.- Tres números están en progresión aritmética y su suma es 18 y el producto del 1er. y el 3ro. es 20. Hallar los números.

Tema IV

a.- Hallar los valores de x, si:

$-6x + 2yi = -5 + 3i$

b.- Hallar n, si $4C(n, 2) = 3C(n, 3)$

Tema V

a.- Interpolar 5 medios aritméticos entre -4 y 8.

b.- Expresar en forma rectangular $2 (\cos 210° + i \text{ sen } 210°)$.

EJEMPLOS EXAMENES

Segundo Parcial

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA
Facultad de Ciencias
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre________________________ **Matrícula**_______
Profesor _______________________
Fecha________________________ **Sec.**___________

Tema I

a.- Efectúa:

$$[4\ (\cos 20° + i \text{ sen } 20°)]^3$$

b.- Hallar solamente sin hacer el desarrollo, el 5to. término de:

$$(4x^2 + y^3)^9$$

Tema II

a.- Hallar x e y si:

$-4x - 3yi = -12 + 9i$

b.- Cuántas señales diferentes se pueden formar con 8 banderas colgadas verticalmente, si 2 son rojas, 3 verdes y 3 azules.

Tema III

a.- La media aritmética de 2 números es 8 y su media armónica es 6. Hallar los números.

b.- Interpolar 4 medios armónicos entre 1/2 y 1/17.

Tema IV

a.- Cuántos comités de 5 varones y 3 mujeres se pueden formar con 8 varones y 6 mujeres.

b.- Efectúa $\dfrac{2-i}{1-2i}$

Tema V

a) Hallar la suma de los 15 primeros términos de 3, 6, 9,...

b) Demostrar que: $1 + tag^2 x = sec^2 x$

EJEMPLOS EXAMENES

Examen Final

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA
Facultad de Ciencias
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

EXAMEN FINAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre____________________________ **Matrícula**________
Profesor __________________________
Fecha_____________________________ **Sec.**____________

1.- Resolver la ecuación $3x^3 + Kx^2 - 7x + 3 = 0$ y halla el valor de K si las raíces, en cierto orden, están en progresión geométrica.

2.- Descomponer $\dfrac{x-9}{(x-3)(x+3)}$ en sus fracciones parciales simples.

3.- Resuelve la siguiente ecuación exponencial: $3^{x+1} = 81$

4.- Determina el Dominio y el Dominio de imagen de la siguiente función.

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

5.- Resuelve y escribe el resultado en forma binómica:

$$\frac{4\left(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°\right)}{2\left(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°\right)}$$

6.- Interpolar cuatro medios geométricos entre 1/9 y –27.

7.- Construir la ecuación dadas las raíces siguientes: –2, –3/4

8.- Halla los valores reales de x e y que cumplen con la relación dada.

$4x + 3yi = 2 - 6i$

9.- Dada la ecuación $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$, halla:

a.- Raíces nulas si las hay
b.- Naturaleza de las raíces
c.- Posibles raíces racionales
d.- Halla todas las raíces de la ecuación.

EJEMPLOS EXAMENES

Examen Final

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA

Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

EXAMEN FINAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre______________________________ **Matrícula** ________
Profesor ____________________________
Fecha______________________________ **Sec.**____________

1.- Dada la ecuación $x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$; Halla:

a.- Raíces nulas si las hay
b.- Naturaleza de las raíces
c.- Posibles raíces racionales
d.- Halla todas las raíces de la ecuación.

2.- Halla el valor que debe tener K para que el polinomio $x^3 + 3x^2 - Kx + 2$ entre $x - 2$ tenga un residuo igual a cero.

3.- Descomponer $\dfrac{x+4}{\left(x+7\right)\left(2x-1\right)}$ en sus fracciones parciales simples.

4.- Resuelve la siguiente ecuación logarítmica:
$\log x + \log (x - 1) = \log 6$.

5.- Resuelve y escribe el resultado en forma binómica.
$[3\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)]^2$

6.- Resuelve y grafica el conjunto solución de la inecuación siguiente:
$x^2 - x - 6 \geq 0$

1.- Determina el Dominio y el Dominio de imagen de la siguiente función:

$$y = \frac{x}{x-1}$$

8.- Dada la ecuación $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$, hallar las raíces sabiendo que una raíz es la opuesta de la otra.

9.- Interpolar 4 medios armónicos entre $-1/2$ y $1/13$.

EJEMPLOS EXAMENES

Examen Final

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO HENRIQUEZ UREÑA

Facultad de Ciencias

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y ESTADISTICA

EXAMEN FINAL DE ALGEBRA SUPERIOR MAT-160

Nombre________________________ Matrícula______
Profesor ______________________
Fecha__________________________ Sec.__________

1.- Resuelve la siguiente ecuación logaritmica: $\log(x-2)+\log(x-3)=\log 2$.

2.- Descomponer $\dfrac{3x+6}{(x-2)(x+4)}$ en sus fracciones parciales simples.

3.- Resolver la ecuación $x^3 - 9x^2 + Kx - 24 = 0$ y hallar el valor de K si las raíces en cierto orden están en progresión aritmética.

4.- Escribe la ecuación cuyas raíces son, -2, 3 y la raíz doble -1.

5.- Determina el Dominio y el Dominio de Imagen de la siguiente función:

$$x^2 + y^2 = 4$$

6.- Halla la suma de los 7 primeros términos de la siguiente progresión geométrica: 3, 6, 12 ....

7.- Dada la ecuación $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$, halla:

a.- Raíces nulas si las hay
b.- Naturaleza de las raíces.
c.- Posibles raíces racionales
d.- Halla todas las raíces de la ecuación.

8.- Resuelve y grafica el conjunto solución: $|3x - 1| \geq 4$.

9.- Resuelve y expresa el resultado en forma binómica: $[3\ (\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)]^2$.

Esta publicación se imprimió en el mes de junio del 1995, en los Talleres Offset de la Universidad Nacional Pedro Henríquez Ureña. Bajo la dirección de Andrés Antonio Mercedes Z.; fotomecánica: Domingo Suero; impresión: José Ant. Tavárez y José Manuel Bello; terminación: Bienvenido Ant. Cleto, Francel Moises Báez, Rafael Garcia y Endry Rafael Peralta.